LES BASES MATHÉMATIQUES

pour réussir à l'université

2e édition

en 80 FICHES

Guillaume Voisin

ellipses

Opérations sur les ensembles

Résumé de cours

Un ensemble est une collection d'éléments. L'**ensemble** E des valeurs a, b et c est noté $E = \{a, b, c\}$. Chaque élément n'est présent qu'une fois dans l'ensemble et dans un ordre quelconque.

➡ L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$.

➡ Lorsqu'un élément a **appartient à un ensemble** E, on note $a \in E$.
On dit que E contient a. Le notation $a \notin E$ signifie que a n'est pas dans E.

➡
- Si E contient un nombre fini d'éléments, E est dit **fini**. Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est le cardinal de E et noté $\mathrm{Card}(E)$.
- Si E contient un nombre infini d'éléments, il est dit **infini**.

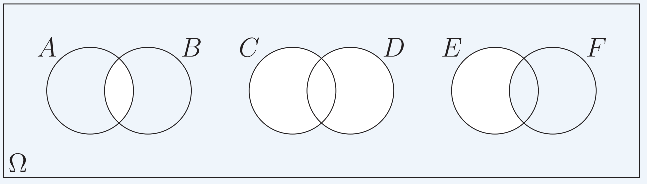
➡ L'**intersection** de deux ensembles E et F est l'ensemble qui contient les éléments présents à la fois dans E et dans F. L'intersection se note $E \cap F$.

➡ L'**union** de deux ensembles E et F est l'ensemble qui contient les éléments de E et les éléments de F. L'union se note $E \cup F$.

➡ On dit que l'ensemble E est **inclus** dans l'ensemble F si tous les éléments de E sont également dans F. On dit également que E est une **partie** ou **sous-ensemble** de F et on note $E \subset F$.
La notation $E \not\subset F$ signifie que E n'est pas inclus dans l'ensemble F.

➡ Le **complémentaire** d'un ensemble E dans un ensemble F est l'ensemble qui contient les éléments de F qui ne sont pas dans E, on note $\complement_F E$, $F \setminus E$ ou parfois E^c ou $\bar{E}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
Si A et B sont deux ensembles, alors $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

➡ Une manière de représenter des ensembles quelconques est d'utiliser des **diagrammes de Venn** parfois appelés « patatoïdes ».



Le rectangle représente l'ensemble Ω. Les sous-ensembles A, B, C, D, E et F sont inclus dans Ω. En blanc sont représentés l'intersection $A \cap B$, l'union $C \cup D$ et la partie $E \setminus F$.

➡
- Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F, noté $E \times F$ et prononcé « E croix F », est l'ensemble des **couples** notés (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.
  L'ensemble $E \times E$ est noté E^2.
  On note $E \times F \times G = \{(a, b, c)\ ,\ a \in E, b \in F \text{ et } c \in G\}$ l'ensemble des **triplets**.
- De manière générale, E^k est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$ et appelés k-**uplets**.
- Le k-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est donc une liste ordonnée de k éléments qui ne sont pas nécessairement distincts.

Soient a, b, c, d, x et y des éléments distincts et A, B, C, E, F et G des ensembles.

Exemples

Donnons ici quelques manipulations et calculs sur les ensembles.

- $a \in \{a, b, c\}$ et $d \notin \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c, a\} = \{c, b, a\}$
- $\{a, b, c\}$ est fini et $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 3$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$
- $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ et $\{a, b, d\} \not\subset \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \setminus \{a, b, d\} = \{c\}$
- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

Exercice 1

Décrire les ensembles suivants.

1) $\{a\} \cup \{b\}$
2) $\{a, b\} \cap \{b, c\}$
3) $\{a\} \cap \{a, b, c\}$
4) $\{a, b\} \cap \{a, b\}$
5) $\{a, b\} \cup \{b, c\}$
6) $\{a, b\} \cup \{a, b\}$

Exercice 2

Calculer les cardinaux suivants.

1) $\text{Card}(\{a\} \cup \{b, c\})$
2) $\text{Card}(\{a, c\} \cap \{b, d\})$
3) $\text{Card}(\{a\} \times \{b, c\})$

Exercice 3

Décrire les ensembles suivants.

1) $(\{a, b\} \cap \{a, c\}) \cup \{b, c, d\}$
2) $(\{a, b\} \cup \{a, c\}) \cap \{b, c, d\}$
3) $\{a, b, d\} \setminus \{b, c\}$
4) $(\{b, c\} \cup \{a, d\}) \setminus \{a, c\}$
5) $\{b, c\} \cup (\{a, d\} \setminus \{a, c\})$
6)* $(\{a, b, c\} \setminus \{a, d\}) \setminus \{a, c\}$
7)* $\{a, b, c\} \setminus (\{a, d\} \setminus \{a, c\})$

Exercice 4

Décrire les ensembles suivants.

1) $A \times B$ avec $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, b, c\}$
2) $E \times F \times G$ avec $E = F = G = \{x, y\}$
3) $E \times (F \cup G)$ et $(E \times F) \cup (E \times G)$ avec $E = \{x, y\}$, $F = \{a, b\}$ et $G = \{c, d\}$

VRAI ou FAUX

Pour tous ensembles A, B et C, indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1) $A \cup B \subset A$.
2) $A \cap B \subset A \cup B$.
3) $A \setminus B \subset A$.
4) $A \setminus B \subset B$.
5) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.
6) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
7) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
9) $A \subset A \times B$.
10)* $A \times B = B \times A$.

FICHE 2

Ensembles de nombres

Bien connaître avant : 1. Opérations sur les ensembles.

Résumé de cours

➟ L'ensemble des nombres **entiers naturels** est noté :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Les nombres **pairs** sont les entiers $2n$ avec $n \in \mathbb{N}$, les **impairs** sont les nombres $2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit **dénombrable** si on peut compter ses éléments. Autrement dit chaque élément de E est associé de manière unique à un élément de $\mathbb{N}$.

➟ L'ensemble des nombres **entiers relatifs** est infiniment dénombrable et se note

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

➟ Les nombres **décimaux** s'écrivent avec un nombre fini de décimales. L'ensemble des nombres décimaux est infini dénombrable et se note $\mathbb{D}$.

➟ Les nombres **rationnels** sont les fractions d'un nombre entier par un entier non nul. Cet ensemble est infini dénombrable et se note $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

➟ Les réels, ou nombres **réels**, sont tous les nombres avec un nombre quelconque de décimales. L'ensemble des nombres réels est infini non dénombrable et se note $\mathbb{R}$.

Intuitivement, ce sont toutes les valeurs numériques.

- Un **intervalle** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les réels entre deux valeurs données.
- L'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble de tous les réels compris entre a et b, a et b inclus. On dit que l'intervalle est **fermé**.
- L'intervalle $]a, b[$ est l'ensemble de tous les réels compris entre a et b, a et b exclus. On dit que l'intervalle est **ouvert**.
- Les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ sont dits **semi-ouverts**.
- L'ensemble $\{a\}$ est un intervalle particulier ne contenant que l'élément a. Il est appelé **singleton**.

Le **bord d'un ensemble** E de réels est l'ensemble des réels x tels que pour tout intervalle ouvert I contenant x, I contient au moins une valeur de E et au moins une valeur pas dans E. Intuitivement, ce sont les **réels** aux extrémités de E, pas forcément dans E.

➟ Les nombres **complexes** sont les nombres s'écrivant $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i vérifie la propriété $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté :

$$\mathbb{C} = \{a + ib\,,\ \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}.$$

Les ensembles présentés précédemment sont infinis et inclus les uns dans les autres.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Exemples

Donnons ici des exemples de valeurs de chacun des ensembles de nombres décrits dans la partie cours.

$$\begin{array}{llllll}
1 \in \mathbb{N} & 1 \in \mathbb{Z} & 1 \in \mathbb{D} & 1 \in \mathbb{Q} & 1 \in \mathbb{R} & 1 \in \mathbb{C} \\
-1 \notin \mathbb{N} & -1 \in \mathbb{Z} & -1 \in \mathbb{D} & -1 \in \mathbb{Q} & -1 \in \mathbb{R} & -1 \in \mathbb{C} \\
123 \notin \mathbb{N} & 123 \notin \mathbb{Z} & 123 \in \mathbb{D} & 123 \in \mathbb{Q} & 123 \in \mathbb{R} & 123 \in \mathbb{C} \\
\frac{1}{3} \notin \mathbb{N} & \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} & \frac{1}{3} \notin \mathbb{D} & \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} & \frac{1}{3} \in \mathbb{R} & \frac{1}{3} \in \mathbb{C} \\
\sqrt{2} \notin \mathbb{N} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} & \sqrt{2} \notin \mathbb{D} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} & \sqrt{2} \in \mathbb{R} & \sqrt{2} \in \mathbb{C} \\
1+i \notin \mathbb{N} & 1+i \notin \mathbb{Z} & 1+i \notin \mathbb{D} & 1+i \notin \mathbb{Q} & 1+i \notin \mathbb{R} & 1+i \in \mathbb{C}
\end{array}$$

Exercice 1

1) Parmi les valeurs suivantes, lesquelles sont des entiers naturels ?

$$0 \quad ; \quad \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \tfrac{-3}{2} \quad ; \quad \tfrac{4}{2} \quad ; \quad i^2 \quad ; \quad -i^2$$

2) Parmi les valeurs suivantes, lesquelles sont des entiers relatifs ?

$$0 \quad ; \quad 2,1 \quad ; \quad \tfrac{2}{5} \quad ; \quad \tfrac{-6}{3} \quad ; \quad -15,5 \quad ; \quad \tfrac{-1}{0,5}$$

3) Parmi les valeurs suivantes, lesquelles sont des décimaux ?

$$0 \quad ; \quad -0,0001 \quad ; \quad 3,14 \quad ; \quad \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \tfrac{1}{7} \quad ; \quad \tfrac{1}{0,4}$$

4) Parmi les valeurs suivantes, lesquelles sont des rationnels ?

$$0 \quad ; \quad 0,6666 \quad ; \quad \tfrac{1}{6} \quad ; \quad \tfrac{-10}{20} \quad ; \quad \pi \quad ; \quad \tfrac{12,5}{13,6}$$

5) Parmi les valeurs suivantes, lesquelles sont des réels ?

$$0 \quad ; \quad \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \tfrac{\pi}{25} \quad ; \quad \tfrac{-1}{0,12345} \quad ; \quad i^2 \quad ; \quad i^3$$

Exercice 2

On considère n et m deux entiers naturels tels que $2 \leq n < m$. Les valeurs suivantes sont-elles des entiers naturels ou relatifs ? rationnelles ? réelles ? complexes ?

1) $n \times m$
2) $n + m$
3) $-n - m$
4) $n - m$
5) $\dfrac{n}{m}$
6) $\dfrac{1}{n}$
7) $\dfrac{-1}{n+m}$
8) $n \times \pi$
9) $n + im$
10) $n \times i^2$

Exercice 3

Écrire sous forme d'intervalles les ensembles de valeurs suivants. Quels en sont les bords ?

1) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leq x \leq 2$
2) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x < 1,2$ et $x > -1,2$
3) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > -3$ et $x \leq 0$
4) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $-1 \leq x \leq 2$ et $x > 0$
5) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{-2}{3} \leq x \leq 10,2$ et $\frac{-1}{3} < x < 20,4$
6) Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq 5$ et $x \geq 5$
7)* Les $x \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq x < 100$

FICHE 3 Notations, logique et raisonnements

Bien connaître avant : 2. Ensembles de nombres.

Résumé de cours

- Si E est un ensemble, la notation $\forall x \in E$ signifie

  « **pour tout** élément x de l'ensemble E ».

- Si E est un ensemble, la notation $\exists x \in E$ signifie

  « **il existe** (au moins) un élément x de l'ensemble E ».

- Si E est un ensemble, la notation $\exists! x \in E$ signifie

  « il existe un unique élément x de l'ensemble E ».

- Une **assertion** est un fait mathématique qui est soit vrai, soit faux.
- Si P et Q sont deux assertions, la notation $P \Rightarrow Q$ (P **implique** Q) signifie que

  si l'assertion P est vraie alors l'assertion Q est vraie.

- Si P et Q sont deux assertions, la notation $P \Leftarrow Q$ (Q implique P) signifie que

  si l'assertion Q est vraie alors l'assertion P est vraie.

- Si P et Q sont deux assertions, la notation $P \Leftrightarrow Q$ (P **si et seulement si** Q) signifie que

  P implique Q et que Q implique P.

  On dit également que P et Q sont **équivalentes**.

- Si P est une assertion, la **négation** de P se note « non P » ou « $\neg P$ ».
  - La négation de « P est vraie **et** Q est vraie » est « P est fausse **ou** Q est fausse ».
  - La négation de « P est vraie **ou** Q est vraie » est « P est fausse **et** Q est fausse ».
- La **réciproque** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est « $P \Leftarrow Q$ ».
- La **contraposée** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est « non $P \Leftarrow$ non Q ».
  Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
- **Raisonnement par l'absurde**

  On considère vraie l'assertion P. On suppose que la assertion « non Q » est vraie, c'est-à-dire que l'assertion Q est fausse.

  Si on obtient une contradiction ou une assertion impossible ou absurde, alors ce que l'on a supposé est faux. C'est-à-dire Q est vraie. Finalement $P \Rightarrow Q$.

  > *Par exemple :* On souhaite montrer que si $x = 2$ alors $x \geq 0$.
  > Soit $x = 2$.
  > On suppose que $x < 0$.
  > Alors $2 < 0$ ce qui est absurde.
  > Ainsi $x < 0$ est absurde. La supposition est donc fausse
  > et donc $x = 2 \;\Rightarrow\; x \geq 0$.

Exemples

- $\forall x \in \mathbb{R}_+ \, , \, x \geq 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 0$.
- $\exists ! x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 0$.
- $x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- $x \leq 0 \Leftarrow x \leq -1$
- $x = 2 \Leftrightarrow -x = -2$.
- La négation de $x \geq 0$ est $x < 0$
- La contraposée de $x = 0 \Rightarrow x \geq 0$ est $x < 0 \Rightarrow x \neq 0$.
- Si P est une assertion dépendant de x, non($\forall x \in \mathbb{R}$, P est vraie) $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$, P est fausse.
- Si P est une assertion dépendant de x, non($\exists x \in \mathbb{R}$, P est vraie) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, P est fausse.

Exercice 1

Compléter les ... par le signe adéquat.

1) $x \leq 2 \; \ldots \; x = 0$
2) $x \neq 0 \; \ldots \; x < 0$
3) $x = y \; \ldots \; 2x = 2y$
4) $x = y \; \ldots \; x \geq y$
5) $x < y \; \ldots \; y \geq x$
6) $\ldots x > 0, \, x \in \mathbb{R}$.
7) $\ldots x \leq 0, \, x = 0$.

Exercice 2

Donner la négation des assertions suivantes. Soient E et F deux ensembles.

1) $x = y$.
2) $x = 1$ et $y = 2$.
3) $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.
4) $\forall x \in F \, , \, x \notin E$.
5) $\exists x \in E$ tel que $x \notin F$.
6)* $\forall x \in E \, , \, \exists y \in F$ tel que $x = y^2$.

Exercice 3

Écrire la contraposée des assertions suivantes. Soient E et F deux ensembles.

1) $x \in E \Rightarrow x \in F$.
2) $x \in E \Rightarrow x \notin F$.
3) $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$.
4) $E \subset F \Leftrightarrow F \cap E = E$.

Exercice 4 *

Écrire un raisonnement par l'absurde pour démontrer les assertions suivantes.

1) Pour $x = 0$, $\nexists y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$.
2) $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
3) Vous souhaitez ranger dix chaussettes dans neuf tiroirs, alors il y aura au moins un tiroir qui aura au moins deux chaussettes. (Ce résultat s'appelle le **principe des tiroirs**)

Exercice 5 *

Démontrer les assertions suivantes en démontrant leur contraposée.

1) Si $n \times n$ est un entier pair alors n est un entier pair.
2) Si $n \times n$ est un entier impair alors n est un entier impair.
3) Soit un réel $a \geq 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $a < \varepsilon$, alors $a = 0$.

FICHE 4 Dénombrement

Bien connaître avant : 1. Opérations sur les ensembles et 2. Ensembles de nombres.

Résumé de cours

Pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on appelle « **factorielle** n » ou « n **factorielle** » la valeur entière

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1 \qquad \text{et par convention } 0! = 1$$

➡ Soient deux ensembles finis E et F et deux sous-ensembles A et B de l'ensemble E. On obtient les formules de dénombrement suivantes.

- $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$ · $\mathrm{Card}(A^c) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$
- $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
- $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$
- Le nombre de sous-ensembles de E est $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

➡ Le nombre de k-uplets d'éléments de E est : $(\mathrm{Card}(E))^k$.
C'est le nombre de manières de choisir k éléments par des **tirages successifs avec remise** dans un ensemble contenant n éléments.

➡ Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est le nombre d'**arrangements** $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, pour $k \leq n$.
C'est le nombre de manières de choisir k éléments par des **tirages successifs sans remise** dans un ensemble contenant n éléments.

➡ Lorsque $k = n$, $A_n^n = n!$ est le nombre de manières de **permuter** n éléments.

➡ Le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments est donné par le **coefficient binomial** ou la **combinaison**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{A_n^k}{k!}, \text{ pour } k \leq n.$$

C'est le nombre de manières de choisir k éléments par un **tirage simultané** (sans ordre entre les éléments) dans un ensemble contenant n éléments.

➡ Le **triangle de Pascal** permet d'obtenir les premières valeurs des combinaisons.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
\qquad \begin{array}{c} \text{correspond} \\ \text{terme à terme} \\ \text{à} \end{array} \qquad
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \ \binom{5}{1} \ \binom{5}{2} \ \binom{5}{3} \ \binom{5}{4} \ \binom{5}{5}
\end{array}$$

Chaque terme est la somme des deux termes au-dessus : $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$

Exemples

- $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
- Pour $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{2,3,4\}$ alors $E \cup F = \{1,2,3,4\}$ et $E \cap F = \{2,3\}$.

$$\text{Card}(E \cup F) = 3 + 3 - 2 = 4,\ \text{Card}(E \times F) = 3 \times 3 = 9 \text{ et } \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$$

- Une urne contient 4 boules différentes. Le nombre de manières de piocher 2 boules l'une après l'autre en les remettant dans l'urne est : $4^2 = 16$.
- Une urne contient 4 boules différentes. Le nombre de manières de piocher 2 boules l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne est : $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$.
- Une urne contient 4 boules différentes. Le nombre de manières de piocher 2 boules en une seule fois est : $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Exercice 1

Calculer les valeurs suivantes.

1) $5!$
2) $\dfrac{6!}{4!}$
3) $\dfrac{9!}{10!}$
4) A_2^1
5) A_5^3
6) A_5^2
7) $\dfrac{A_3^2}{2!}$
8) $\dfrac{A_5^4}{4!}$
9) $\dbinom{2}{1}$
10) $\dbinom{5}{3}$
11) $\dbinom{5}{2}$
12) $\dbinom{10}{5}$
13) $\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}$
14) $\dbinom{9}{3}+\dbinom{9}{4}$

Exercice 2

Soient des ensembles E, $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $\text{Card}(E) = 5$, $\text{Card}(A) = 3$, $\text{Card}(B) = 2$ et $\text{Card}(A \cap B) = 1$. Calculer les valeurs suivantes.

1) $\text{Card}(A \times B)$
2) $\text{Card}(A \cup B)$
3) $\text{Card}(A^c)$
4) $\text{Card}(A \setminus B)$
5) $\text{Card}(B \setminus A)$
6) $\text{Card}(\mathcal{P}(A))$
7) $\text{Card}(\mathcal{P}(B))$
8) $\text{Card}(A^c \cup B^c)$

Exercice 3

Il y a 18 chevaux au départ d'une course de chevaux. Un tiercé est la liste des 3 chevaux en tête à la fin de la course.

1) Combien y a-t-il de manières de ranger les chevaux dans les 18 boîtes de départ ?
2) Combien y a-t-il de tiercés possibles dans le désordre, c'est-à-dire sans tenir compte de l'ordre ?
3) Combien y a-t-il de tiercés possibles dans l'ordre, c'est-à-dire en tenant compte de l'ordre ?

Exercice 4

1) Un grille de loto contient 49 numéros, combien y a-t-il de manières de cocher 5 numéros ? Il y a en plus un numéro chance à choisir parmi 10. Combien y a-t-il alors de possibilités ?
2) Une grille d'euromillions est composée de 5 numéros à choisir parmi 50 et 2 étoiles parmi 12. Combien y a-t-il de possibilités ?