ECG
1re année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

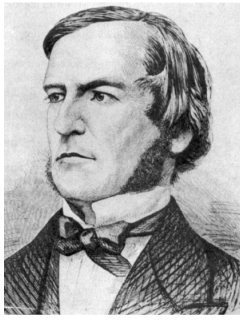
5e édition
+ exos-minute

ellipses

Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre 2.

et plus si affinités

- Savoir effectuer un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.
- Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

■■ Résumé de cours

■ Les éléments du raisonnement

❑ Proposition

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1. — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier n.

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel x, " $(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ " n'est pas une proposition.

❑ Quantificateurs

Notation 1.1. — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x...*".
" $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".
" $\exists x\in\,]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).
" $\exists!n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $\big(\forall x,\exists y,\mathcal{P}(x,y)\big)$ est différente de $\big(\exists y,\forall x,\mathcal{P}(x,y)\big)$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{Z},\ n\leq x<n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière du réel x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R},n\leq x<n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.6. — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

• La négation de " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " est :

" $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$ "

La première proposition est vraie (voir l'**exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).

Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).

Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire 1.1 — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?**
⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire 1.2 — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

Exemple 1.10. — $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.1. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, que $\mathcal{Q}$ est fausse, et on montre que c'est impossible.

⇨ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.2. — Soit un entier naturel n_0.
Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ Méthode 1.5. Comment montrer une proposition par récurrence ?

Vocabulaire 1.3 — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\big(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big) \Rightarrow \big(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\big)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.
Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.3. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence d'ordre p (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.3. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \ldots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de $\mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?

❑ La contraposition

Théorème 1.4. — Montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ revient à montrer que, si $\mathcal{Q}$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}$ n'est pas vraie.

■ Comparaison d'expressions

❑ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction f est monotone sur un ensemble I, et si x et y appartiennent à I, alors comparer x et y suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.

Plus précisément :

• Si f est croissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

• Si f est décroissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de f (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de f).

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

• Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

• Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

• Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \leq 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Sur la copie :
Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$\forall n \geq 2$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 1-\frac{2}{n}$ (car $\frac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$) donc : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ et on étudie la fonction f sur $]-1, +\infty[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Comme $1+x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x, ce qui prouve que f décroît sur $]-1, 0[$ et croît sur $]0, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum pour $x=0$.

On a alors : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0)=0$ on obtient : $x-\ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$$

■ Différents types de raisonnement

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

⇨ **Exercices 1.5, 1.7, 1.8, 1.12**

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $|x-4| > 3$.

Si $x < 1$, alors $x - 4 < -3$. Par décroissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $|x-4| > |-3|$. Ceci veut bien dire que : $|x-4| > 3$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $(x < 1) \Rightarrow (|x-4| > 3)$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇨ **Exercice 1.6**

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

■ Récurrences

❑ Méthode 1.5. Comment montrer une proposition par récurrence ?

n_0 est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n supérieur ou égal à n_0. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.7, 1.8, 1.9, 1.11**

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n) : "u_n = 1"$.

• Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie par choix de u_0.

• Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (c'est-à-dire $u_n = 1$) pour un entier naturel n fixé.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{3\times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

❑ Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
- Hérédité : on considère un entier n fixé, supérieur ou égal à n_0, tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Grâce à $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ Exercice 1.10

Remarque. On généralise sans problème au cas d'une récurrence d'ordre 3 ou plus.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

On commence par noter, pour n appartenant à $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : "u_n = 3^n - 2^{n+1}"$.

• Initialisation (pour $n = 0$) :

$3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1 = u_0$ et $3^1 - 2^2 = 3 - 4 = -1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• Hérédité :

On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un entier n naturel fixé et on va montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on a : $u_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$).

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$, car $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies.

Comme $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et $2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1}$, on a :

$u_{n+2} = (5\times 3 - 6).3^n + (-5\times 2 + 6).2^{n+1} = 9\times 3^n - 4\times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [x, +\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n \leq y$.	☐	☐
2.	$\exists ! y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, x^2 = y$.	☐	☐
3.	La fonction f n'est pas la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.	☐	☐
4.	Une suite est soit croissante, soit décroissante.	☐	☐
5.	On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est paire si l'on a pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$. On dit que f est impaire si l'on a pour tout réel x : $f(-x) = -f(x)$. Si f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas paire, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$.	☐	☐
6.	On désigne par a et b deux réels, alors : $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0$ ou $b \neq 0)$.	☐	☐
7.	Il est suffisant qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ pour qu'elle soit continue sur I.	☐	☐
8.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(\lvert u_n \rvert)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.	☐	☐
9.	On peut prouver par récurrence sur n la proposition : " $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ".	☐	☐
10.	Si $\mathcal{P}(n)$ est " $u_{2n+1} \leq 2^n$ ", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est " $u_{2n+2} \leq 2^{n+1}$ ".	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos-minute

❑ **Exercice 1.1.** — On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est paire si l'on a pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$ et on dit que f est impaire si l'on a pour tout réel x, $f(-x)=-f(x)$.

Soit f la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

❑ **Exercice 1.2.** — On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

❑ **Exercice 1.3.** — On considère le polynôme P défini par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3+\frac{11}{24}x^2+\frac{7}{12}x+1.$$

Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. Peut-on en déduire quelque chose pour $P(5)$?

❑ **Exercice 1.4.*** — Une inégalité concernant la fonction exponentielle.

1. Montrer l'inégalité suivante : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x}\geq x+1$.

2. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\left[0,\sqrt{n}\right],\ \mathrm{e}^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\leq 1$$

D'après EML

❑ **Exercice 1.5.** — Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-f'(x)-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

2. En déduire une fonction g telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=f(x)$.

D'après EDHEC

❑ **Exercice 1.6.**** — Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (où l'on désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers).

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers n et p, $p\geq 1$, tels que $\sqrt{2}=\dfrac{n}{p}$.

On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible (non simplifiable).

1. Justifier que n^2 est pair puis montrer que n est pair.

2. En écrivant n sous la forme $2n'$, avec n' élément de $\mathbb{N}$, montrer que p lui-même est pair.

3. Conclure.

❑ **Exercice 1.7.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 3$.

❑ **Exercice 1.8.** — Soit un réel a positif. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$$

❑ **Exercice 1.9.** — Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse.
Prouver en revanche que l'on a :

$$\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$$

❑ **Exercice 1.10.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit : $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2^n$$

❑ **Exercice 1.11.*** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n+1} = -1$$

❑ **Exercice 1.12.**** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda^n + \mu^n, \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels tels que } 0 < \lambda \leq \mu$$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq \mu < 1$ (on pourra mettre μ^n en facteur).

❑ **Exercice 1.13.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer u_2.

D'après EDHEC

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Il suffit de trouver un contre-exemple à chaque fois, c'est-à-dire un réel x tel que $f(-x) \neq f(x)$ et un autre tel que $f(-x) \neq -f(x)$.

Exercice 1.2. Pour répondre, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 suffisent.

Exercice 1.4. Pour la question **1**, étudier la fonction qui à x associe $e^x - x - 1$.
Pour la question **2**, appliquer l'inégalité de la question **1** en remplaçant x par $-t^2/n$, puis utiliser la croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.5. Pour la question **2**, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

Exercice 1.6. Pour la question **1**, ayant obtenu que n^2 est pair, pour montrer que n est pair, supposer que n est impair et montrer qu'alors n^2 serait impair.
Exercices 1.7 à **1.10**, faire une récurrence.

Exercice 1.11. En notant $\mathcal{R}(n)$ la proposition "$u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$", faire attention que $\mathcal{R}(n+1)$ est la proposition "$u_{2n+2} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+3} = -1$".

Exercice 1.12. La preuve s'obtient par double implication. L'indication de l'énoncé concerne le sens "$\Rightarrow$". L'autre implication est rapide.
Exercice 1.12. Faire attention de remplacer n par 0 partout !

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	V	F	F	F	F	V	V	F	F

1. Il suffit de choisir $x = 1{,}5$ et $y = 1{,}6$.

2. Posons $P(y)$: "$\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$". Cette proposition n'est vraie que pour $y = 0$.
En effet, l'équation $x^2 = y$ possède deux solutions réelles si $y > 0$ et aucune solution réelle si $y < 0$. Ainsi on a bien : "$\exists! y \in \mathbb{R}, P(y)$", et ce "$y$" est 0.

3. f est la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
f n'est pas la fonction nulle signifie donc : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
Par exemple, la fonction qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 3$ n'est pas la fonction nulle.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et –1 et n'est donc ni croissante ni décroissante.

5. C'est le même problème qu'au **V/F 3**. La fonction f n'est pas paire s'il existe un réel x tel que $f(-x) \neq f(x)$.

6. Les deux facteurs du produit doivent être différents de 0 si l'on veut que le produit soit différent de 0 (sinon, dès qu'un facteur est nul, on sait que le produit est nul).

7. En effet, si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle y est continue (c'est au programme de terminale).

8. • Si la suite (u_n) est bornée, alors : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.
On en déduit : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, -\max(|M|, |m|) \leq u_n \leq \max(|M|, |m|)$.
En posant $A = \max(|M|, |m|)$, on a bien : $-A \leq u_n \leq A$. Par propriété de la valeur absolue, ceci donne : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$. La suite $(|u_n|)$ est bien majorée (par A).

• Réciproquement, si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n| \leq A$, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, -A \leq u_n \leq A$. Ceci prouve bien que la suite (u_n) est bornée.

9. La propriété " $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$" ne dépendant pas de n, une démonstration par récurrence est absurde.

10. $\mathcal{P}(n)$ est la proposition " $u_{2n+1} \leq 2^n$ ", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est la proposition " $u_{2(n+1)+1} \leq 2^{n+1}$ ", c'est-à-dire : " $u_{2n+3} \leq 2^{n+1}$ ".

❑ Les erreurs classiques

• Il faut bien penser que la négation de "pour tout x de A, x vérifie P" est "il existe x dans A ne vérifiant pas P" et non pas "pour tout x de A, x ne vérifie pas P".
C'est en fait la technique du contre exemple qui est ainsi mise en valeur.

• Il faut éviter de penser que les fonctions continues sont dérivables, c'est la réciproque qui est vraie : attention donc à l'utilisation abusive du symbole $\Leftrightarrow$.

• Il ne faut pas croire qu'il suffise d'ajouter 1 au hasard pour passer de la propriété $\mathcal{P}(n)$ à la propriété $\mathcal{P}(n+1)$, il faut remplacer n par $n+1$.

• Si l'on a, par exemple $m \leq u_n \leq M$, il ne faut pas conclure trop hâtivement que $|u_n| \leq M$. On peut s'en convaincre avec les exemples suivants.
$-3 \leq u_n \leq 2$, où l'on a : $|u_n| \leq 3$
$-2 \leq u_n \leq 3$, où l'on a : $|u_n| \leq 3$
$2 \leq u_n \leq 3$, où l'on a : $|u_n| \leq 3$
$-3 \leq u_n \leq -2$, où l'on a : $|u_n| \leq 3$

Corrigé

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

On a : $f(-1)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}=\dfrac{1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{1}+1\right)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}$ et $f(1)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{1}+1)}{1+\mathrm{e}^{1}}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On a $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$, ce qui prouve (contre exemple) que f n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 1.2

On a : $u_0=1$, $u_1=-\dfrac{1}{2}$, $u_2=\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire : $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas monotone.

Exercice 1.3

• Après calculs, on trouve $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=4$, $P(3)=8$ et $P(4)=16$.

• On remarque que pour tout entier k de $[\![0,4]\!]$, on a : $P(k)=2^k$. On est alors tenté d'en déduire que $P(5)=2^5=32$. Mais en calculant, on trouve $P(5)=31$ (!).

On en conclut qu'il faut absolument prouver par récurrence toutes les conjectures faites, même si celles-ci sont vérifiées par les 5 premiers entiers.

Exercice 1.4

1. On définit la fonction f par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$.

f est sans problème dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et valant 1 en 0, on en déduit : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ f'(x)<0\\ f'(0)=0\\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)>0\end{cases}$

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet donc un minimum en 0. On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq f(0)$, c'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x}-x-1\geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x}\geq x+1$.

⇨ *Méthode 1.2*

2. Soit n un entier naturel non nul et t un élément de $\left[0,\sqrt{n}\right]$.

Écrivons l'inégalité $\mathrm{e}^{x}\geq x+1$ pour $x=-\dfrac{t^2}{n}$. On obtient : $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}\geq 1-\dfrac{t^2}{n}$.

Comme t appartient à $\left[0, \sqrt{n}\right]$, alors $1-\frac{t^2}{n} \geq 0$. De plus, la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut l'appliquer à l'inégalité écrite à la deuxième ligne de cette question, ce qui donne :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \geq \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$$

On peut multiplier par $\mathrm{e}^{t^2} > 0$, ce qui permet d'avoir : $1 \geq \mathrm{e}^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right], \ \mathrm{e}^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq 1$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.5

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \times \ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{-x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - f(x)$.

Comme $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, on trouve : $f'(x) = 1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - f(x)$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 1 - f'(x) - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

⇨ *Méthode 1.3*

2. Une fonction g telle que, pour tout réel x, on a $g'(x) = f(x)$ vérifie donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = 1 - f'(x) - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Les fonctions en présence dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus sont toutes des dérivées connues donc on peut en déduire une fonction g solution en la définissant, par exemple, par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - f(x) - \ln\left|1+\mathrm{e}^x\right| = x - f(x) - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.

Exercice 1.6

Posons $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$, avec n et p entiers naturels tels que p est non nul et $\frac{n}{p}$ non simplifiable.

1. On a alors $n = p\sqrt{2}$ et donc $n^2 = 2p^2$ ce qui signifie que n^2 est pair.

Pour montrer que n est pair, raisonnons par l'absurde en supposant que n est impair. Dès lors, il existerait un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. On aurait alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

En posant $j = 2k^2 + 2k$, j est bien un entier naturel et on a $n^2 = 2j+1$ donc n^2 serait impair.

En conclusion, on a montré que si n était impair, alors n^2 serait impair, ce qui est faux d'après la question **1**. Par conséquent, n est pair.

Corrigé

2. n est pair signifie qu'il existe n' élément de $\mathbb{N}$, tel que $n=2n'$. En réécrivant l'égalité $n^2=2p^2$ avec n', on obtient $4\left(n'\right)^2=2p^2$, soit $p^2=2\left(n'\right)^2$, ce qui prouve que p^2 est pair.
En raisonnant encore une fois comme ci-dessus, on obtient que p est pair.

3. Finalement p et n sont tous les deux des entiers pairs, ils sont donc tous les deux divisibles par 2 ce qui contredit le fait que $\frac{n}{p}$ est non simplifiable.

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers donc : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.7

Procédons par récurrence en posant, pour tout entier naturel n : $P\left(n\right)$: "u_n existe et $0\leq u_n\leq 3$".

• $P(0)$ est vraie car $u_0=0$ donc u_0 existe et $0\leq u_0\leq 3$.

• Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

Par hypothèse de récurrence, on a $0\leq u_n\leq 3$ donc $6\leq u_n+6\leq 9$. Comme $u_n+6\geq 6\geq 0$, on peut prendre la racine carrée ce qui prouve que u_{n+1} existe et, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\sqrt{6}\leq u_{n+1}\leq 3$, ce qui implique : $0\leq u_{n+1}\leq 3$.

On a montré que $P(n+1)$ est vraie.

Finalement, on a montré par récurrence que u_n existe et que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 3$$

⇨ *Méthodes 1.5, 1.7, 1.8*

Exercice 1.8

Procédons par récurrence en posant, pour tout entier naturel n : $R\left(n\right)$: "$\left(1+a\right)^n\geq 1+na$".

• $R(0)$ est vraie car $\left(1+a\right)^0=1=1+0\times a$, donc $\left(1+a\right)^0\geq 1+0a$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

On a $\left(1+a\right)^{n+1}=\left(1+a\right)^n\left(1+a\right)$.

Comme $\left(1+a\right)>0$, l'hypothèse de récurrence donne $\left(1+a\right)^{n+1}\geq\left(1+na\right)\left(1+a\right)$.

Or $\left(1+na\right)\left(1+a\right)=1+\left(n+1\right)a+na^2$ et de plus, comme n est un entier naturel, on a $na^2\geq 0$ donc $\left(1+na\right)\left(1+a\right)\geq 1+\left(n+1\right)a$. Ainsi, $R\left(n+1\right)$ est vraie.

Finalement, grâce au principe de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(1+a\right)^n\geq 1+na$$

⇨ *Méthodes 1.5, 1.7, 1.8*

Exercice 1.9

• La proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2\right)$ est fausse puisque $2^3 = 8$ alors que $3^2 = 9$.

• Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 4, posons $P(n)$: "$2^n \geq n^2$".

$P(4)$ est vraie. En effet, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$.

Supposons *P*(*n*) vraie pour un certain entier naturel *n* supérieur ou égal à 4.

On a alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$ par hypothèse de récurrence.

On doit donc montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$.

En faisant la différence, on a : $2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - (n^2 + 2n + 1) = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$.

Comme $n - 1 \geq 3$, il est certain que $(n-1)^2 - 2$ est supérieur ou égal à 7, donc positif.

On a donc bien : $2n^2 \geq (n+1)^2$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

⇨ *Méthode 1.5*

Exercice 1.10

Procédons par récurrence double en posant pour tout entier naturel *n*, $R(n)$: "$u_n \leq 2^n$".

• *R*(0) et *R*(1) sont vraies puisque $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 1 \leq 2^1$.

• Supposons $R(n)$ et $R(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel *n*.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a alors : $u_{n+2} \leq 2^{n+1} + 2^n$.

On en déduit : $u_{n+2} \leq 2^n (2+1) \leq 2^n \times 4$. Après simplification, on a bien : $u_{n+2} \leq 2^{n+2}$.

Ceci signifie que $R(n+2)$ est vraie.

Finalement, par récurrence double, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \leq 2^n$.

⇨ *Méthode 1.6*

Exercice 1.11

Procédons par récurrence en posant pour tout entier naturel *n* : $R(n)$: "$u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$".

• *R*(0) est vraie car $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un certain entier naturel *n*.

On a d'une part, $u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1}$ et, comme $u_{2n+1} = -1$ (par hypothèse de récurrence), on trouve :

$$u_{2n+2} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

D'autre part, $u_{2n+3}=\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+2}-1}$ et comme $u_{2n+2}=\dfrac{1}{2}$, on a $u_{2n+3}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$, ce qui donne après simplifications : $u_{2n+3}=-1$. Ainsi, $R(n+1)$ est vraie.

Finalement, par récurrence, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{2n}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1}=-1$$

⇨ *Méthode 1.5*

Exercice 1.12

Procédons par double implication.

• L'implication "$\Leftarrow$" se traite rapidement.

En effet, si $0<\lambda\leq\mu<1$, les suites (λ^n) et (μ^n) sont des suites géométriques dont la raison est dans $]0,1[$. Ces suites convergent donc vers 0 et, par somme, la suite (u_n) converge vers 0.

• Examinons l'implication "$\Rightarrow$".

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\mu^n\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+1\right)$ (car $\mu\neq 0$).

La suite $\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $\dfrac{\lambda}{\mu}\in\,]0,1]$ (puisque $0<\lambda\leq\mu$) donc cette suite converge vers 0 (si $\lambda<\mu$) ou vers 1 (si $\lambda=\mu$) et $\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+1\right)$ converge vers 1 ou vers 2.

Or la suite (u_n) converge vers 0 par hypothèse, donc, puisque $u_n=\mu^n\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+1\right)$, la suite (μ^n) converge vers 0, ce qui prouve que μ est un élément de $]0,1[$ (on sait déjà que μ est strictement positif). Finalement, on a : $0<\lambda\leq\mu<1$.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.13

Grâce à la relation donnée par l'énoncé, en faisant $n=0$, on trouve : $u_2+2u_1+u_0=1$.

Ensuite, on remplace u_0 et u_1 par leur valeur et on obtient :

$$u_2+(2\ln(2)-1)+\frac{1}{2}=1$$

On a donc :

$$u_2=\frac{3}{2}-2\ln(2)$$

Chapitre 2

Sommes et produits

UN MATHÉMATICIEN

Le mathématicien et astronome indien **Brahmagupta** a développé des méthodes très sophistiquées en arithmétique. C'est dans ses écrits que l'on rencontre pour la première fois l'usage du zéro et de nombres négatifs et il manie les racines carrées avec habileté. Il résout des équations du premier et même du second degré. C'est à son époque que l'on voit apparaitre la numération de position en base 10 mais il ne semble pas en être l'initiateur.

Un peu d'histoire

Les Sumériens et les Babyloniens avaient déjà élaboré des méthodes de calcul, surprenantes pour l'époque.

La numération de position, inventée par les Indiens vers le VI^{e} siècle puis généralisée par les Arabes, s'introduit lentement en Occident à la fin du Moyen-Âge ; elle permet d'élaborer des algorithmes pour les opérations simples. L'introduction des logarithmes au tout début du XVII^{e} siècle a permis d'effectuer des calculs sur des très grands nombres, ce qui a entrainé de spectaculaires progrès en astronomie.

L'émergence de l'informatique, en particulier des tableurs, mais aussi l'arrivée des calculatrices de poche, ont modifié totalement notre rapport au calcul, mais pourtant, un bon maniement du calcul mental reste un garde-fou salutaire pour éviter des erreurs.

Objectifs

les incontournables

- Savoir écrire une somme ou un produit symbolique (avec $\sum$ ou $\prod$).
- Savoir effectuer un changement d'indice.
- Connaître la technique du "télescopage".
- Connaître les sommes classiques.

et plus si affinités

- Savoir manipuler des sommes doubles.
- Savoir calculer les sommes géométriques dérivées.

■■ Résumé de cours

■ Sommes de nombres réels

❑ Présentation du symbole ∑

Notation 2.1 — Les sommes sont symbolisées par la lettre grecque sigma majuscule.
Pour tout entier naturel n non nul, si $x_1, x_2, ..., x_n$ désignent des réels, la somme $x_1 + x_2 + ... + x_n$ se note symboliquement : $\sum_{k=1}^{n} x_k$ (ou $\sum_{1 \leq k \leq n} x_k$, ou encore $\sum_{k \in [\![1,n]\!]} x_k$).

Dans la somme ci-dessus, k s'appelle *l'indice*, 1 et n sont les *bornes* de la somme.
Plus généralement, quels que soient les entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, on a :

$$x_p + x_{p+1} + ... + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$$

Exemples 2.1. — $1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$. $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$, où q désigne un nombre réel.

Remarque 2.1. — L'indice d'une somme est dit *muet*, ce qui signifie que l'on peut écrire :

$$x_1 + ... + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = ...$$

❑ Premières propriétés

Propriété 2.1. — Si $p \leq n$, alors la somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$ contient $(n - p + 1)$ termes.

Propriété 2.2. — Somme de quelques termes d'une suite constante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^{n} a = (n - p + 1)a .$$

Propriété 2.3. — $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=n}^{n} x_k = x_n$ (cas d'une somme réduite à un seul terme).

Propriété 2.4. — $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geq m+1, \ \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k$.

Propriété 2.5. — $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$ (factorisation par λ qui ne dépend pas de l'indice).

Propriété 2.6. — $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$ (découpage d'une somme).

❑ Changement d'indice

Propriété 2.7. — Changement d'indice croissant.
Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ et m un entier (positif ou négatif), alors on a :

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i \ .$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = k + m$.

⇨ **Méthode 2.1. Comment passer de $\sum_k x_{k+m}$ (ou $\sum_k x_{k-m}$) à $\sum_i x_i$?**

Exemple 2.2. — $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{2n} \frac{e^i}{(i+1)^2} = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{e^{j-1}}{j^2}$ (on a posé $j = i+1$).

Propriété 2.8. — Changement d'indice décroissant.
Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ et m un entier supérieur ou égal à n, alors on a :

$$\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i \ .$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = m - k$.

⇨ **Méthode 2.2. Comment passer de $\sum_k x_{m-k}$ à $\sum_i x_i$?**

Exemple 2.3. — $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (k+1)\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$ (on a posé : $i = n - k$).

Remarque 2.2. — Tout autre changement d'indice que ceux indiqués dans les **propriétés 2.7.** et **2.8.** (c'est-à-dire $i = k \pm cste$ ou $i = -k \pm cste$) conduit à une catastrophe car il modifie le nombre de termes de la somme et modifie donc la somme.

❑ "Télescopage" de sommes

Propriété 2.9. — Pour tout entier naturel n et quels que soient les réels $x_0, ..., x_{n+1}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0 \ .$$

⇨ **Méthode 2.3. Comment utiliser la technique du télescopage ?**

Il faut savoir prouver cette propriété et ne pas se contenter de l'apprendre par cœur, car elle prend plusieurs autres formes, comme par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left(x_{k-1}-x_k\right)=x_0-x_n$. On en trouvera la démonstration à la **méthode 2.3**.

■ Sommes usuelles

❑ Sommes des puissances des *n* premiers entiers naturels non nuls

Propriété 2.10. — $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. $\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Remarque 2.3. — Un bon entraînement consiste à prouver par récurrence le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (voir le **V/F 3** pour cette dernière).

❑ Somme géométrique

Propriété 2.11. — On désigne par q un réel.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Remarque 2.4. — Plus généralement, lorsque $q \neq 1$, on a :

$$\forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en notant que q^p est le premier terme de la somme et $n-p+1$ est le nombre de termes de la somme.

■ Sommes doubles

❑ Somme double à indices indépendants

Notation 2.2 — La somme des nm nombres $\left(x_{i,j}\right)$, où i parcourt l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et j parcourt l'ensemble $\{1, 2, ..., m\}$, est notée $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} x_{i,j}$.

Remarque 2.5. — Si $m = n$, la somme $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} x_{i,j}$ est souvent notée $\sum_{1\leq i,j\leq n} x_{i,j}$.

Exemple 2.4. — Avec $n = 3$, on a $\sum_{1\leq i,j\leq 3} x_{i,j} = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3}$.

Propriété 2.12. — Interversion de sommes : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)$.

⇨ **Méthode 2.4. Comment intervertir les ∑ dans une somme double à indices indépendants ?**

Remarque 2.6. — On peut plus simplement écrire : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$.

❑ Exemples de sommes doubles à indices dépendants

Exemples et notations 2.5. — La somme $x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,4}$ se note $\sum_{1\leq i< j\leq 4} x_{i,j}$.

La somme $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{4,4}$ se note $\sum_{1\leq i\leq j\leq 4} x_{i,j}$.

Propriété 2.13. — Interversion de sommes à indices dépendants :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$$

$$\sum_{1\leq i< j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

⇨ **Méthode 2.5. Comment intervertir les ∑ dans une somme double à indices dépendants ?**

Propriété 2.14. — Quels que soient les n réels, $x_1,...,x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leq i< j\leq n} x_i x_j$$

■ Produit de nombres réels

❑ Présentation du signe $\prod$

Notation 2.3 — Soit n un entier naturel non nul, et n réels, $x_1,...,x_n$.

Le produit $x_1\times\cdots\times x_n$ se note symboliquement : $\prod_{k=1}^{n} x_k$

❑ Propriétés

Propriété 2.15. — $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n}\lambda = \lambda^n$.

Propriété 2.16. — $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq m+1,\ \prod_{k=1}^{n} x_k = \left(\prod_{k=1}^{m} x_k\right) \times \left(\prod_{k=m+1}^{n} x_k\right)$.

Propriété 2.17. — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$.

Propriété 2.18. — Si aucun des y_k n'est nul, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$.

Propriété 2.19. — Télescopage.

$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$, à la condition que $x_0, ..., x_n$ soient non nuls.

❑ Factorielle

Définition 2.1. — Pour tout entier naturel n, on appelle *factorielle* de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Définition 2.2. — Définition "récursive" de $n!$

$0! = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$

Remarque 2.7. — Les factorielles seront revues au **chapitre 15** consacré aux coefficients binomiaux.

■ Changement d'indice

❑ Méthode 2.1. Comment passer de $\sum_k x_{k-m}$ (ou $\sum_k x_{k+m}$) à $\sum_i x_i$?

■ On désigne par m, n et p des entiers naturels tels que $m \leq p \leq n$.

Pour passer de $\sum_{k=p}^{n} x_{k-m}$ à $\sum_{i=p-m}^{n-m} x_i$, on pose $i = k - m$, c'est-à-dire $k = i + m$.

- Dans le terme générique de la somme, on remplace chaque k par $i + m$.
- Pour les bornes : $\begin{cases} \text{borne supérieure : lorsque } k = n, \text{ alors } i = n - m \\ \text{borne inférieure : lorsque } k = p, \text{ alors } i = p - m \end{cases}$.
- On obtient alors : $\sum_{k=p}^{n} x_{k-m} = \sum_{i=p-m}^{n-m} x_i$.

■ On désigne par m, n et p des entiers naturels tels que $p \leq n$.

Pour passer de $\sum_{k=p}^{n} x_{k+m}$ à $\sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$, on pose $i = k + m$, c'est-à-dire $k = i - m$.

On obtient de même : $\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$.

⇨ Exercices 2.3, 2.4, 2.6

Remarque. L'indice étant muet, avec un peu d'habitude, on pourra ne pas changer de lettre :

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k-m} = \sum_{k=p-m}^{n-m} x_k \text{ et } \sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{k=p+m}^{n+m} x_k .$$

Exemple. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k^2 - 2k + 1)$ sans la scinder en 3 sommes.

On remarque que $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2$ et on effectue le changement d'indice $i = k - 1$.

Si $k = 2$, alors $i = 1$: la nouvelle borne inférieure de la somme est 1.

Si $k = n + 1$, alors $i = n$: la nouvelle borne supérieure de la somme est n.

Il reste à remplacer k par $i + 1$ (ou $k - 1$ par i) dans le terme générique de la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

❑ Méthode 2.2. Comment passer de $\sum_k x_{m-k}$ à $\sum_i x_i$?

Pour passer de $\sum_{k=p}^{n} x_{m-k}$ à $\sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$, on pose $i = m-k$, c'est-à-dire $k = m-i$.

- Dans le terme générique, on remplace chaque k par $m-i$.
- Pour les bornes : $\begin{cases} \text{borne supérieure : lorsque } k=n, \text{ alors } i=m-n \\ \text{borne inférieure : lorsque } k=p, \text{ alors } i=m-p \end{cases}$.
- On obtient donc $\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$ (on inverse les bornes car, usuellement, on place la plus petite borne en dessous du symbole Σ et la plus grande au-dessus).

⇨ **Exercice 2.3**

Exemple. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$ sans la scinder en 2 ou 3 sommes.

On effectue le changement d'indice $i = n-k+1$.
Si $k=1$, alors $i = n$: la nouvelle borne supérieure (et non inférieure) de la somme est n.
Si $k = n$, alors $i = 1$: la nouvelle borne inférieure (et non supérieure) de la somme est 1.
Il reste à remplacer $n-k+1$ par i dans le terme générique de la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

❑ Méthode 2.3. Comment utiliser la technique du télescopage ?

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k$$ on a scindé la somme en deux sommes

$$= \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{k=0}^{n} x_k$$ on a fait le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_0\right)$$ on a mis en évidence les termes communs aux deux sommes

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_0 = x_{n+1} - x_0$$

On peut retenir que $\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = x_{n+1} - x_0$ et adapter ce résultat selon les bornes.

⇨ **Exercices 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7**

Exemple. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n.

On remarque que, quel que soit l'entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$. Par télescopage on trouve : $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Remarque. On peut bien sûr suivre la méthode de l'encadré pas à pas si l'on ne se sent pas en sécurité (il n'est pas question de prendre le moindre risque).

■ Interversion de ∑ dans une somme double

❑ Méthode 2.4. Comment intervertir les ∑ dans une somme double à indices indépendants ?

Dans la double somme "$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J}$", si l'indice i n'apparaît pas dans la somme sur j, alors on intervertit tout bonnement les deux signes ∑ : $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} x_{i,j}$.

Exemple. On a, sans jamais aucun problème : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$.

❑ Méthode 2.5. Comment intervertir les ∑ dans une somme double à indices dépendants ?

Pour intervertir les signes ∑ dans la somme : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_{i,j}$, on peut procéder ainsi :

- Le système d'indices qui la décrit est $\begin{cases} 1 \le i \le n \\ i \le j \le n \end{cases}$.
- On synthétise ces conditions ainsi : $1 \le i \le j \le n$.
- On les réorganise enfin en "partant" de j : $\begin{cases} 1 \le j \le n \\ 1 \le i \le j \end{cases}$.
- On en déduit que la double somme s'écrit : $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$.

⇨ **Exercice 2.9**

Remarque 1. La nouvelle somme de gauche (somme extérieure qui est calculée en dernier), donne le résultat final, par conséquent ses bornes ne doivent pas dépendre de l'indice *i* de la nouvelle somme de droite (somme intérieure qui est calculée en premier).

Remarque 2. On agit de la même façon avec la double somme $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}$, qui est égale à $\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$.

Exemple. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$ en fonction de n.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}$$ (on a reconnu une somme usuelle)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1} j$$ (changement d'indice)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} j-1\right)$$ (on a ajouté à la somme le terme d'indice $j=1$, puis on l'a enlevé)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}=\frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right)=\frac{n^2+3n}{4}=\frac{n(n+3)}{4}.$$

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Quel que soit l'entier naturel n non nul et quels que soient les réels $x_1,...,x_n$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k\,x_k = k\sum_{k=1}^{n} x_k$.	☐	☐
2.	Quels que soient les réels $x_0,...,x_{2n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_{2k} = \sum_{i=0}^{2n} x_i$.	☐	☐
3.	$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.	☐	☐
4.	$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1} k \neq \sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=2}^{n+1} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1$.	☐	☐
5.	Quel que soit l'entier naturel n et quels que soient les réels $x_0,...,x_{n+2}$, on a : $\sum_{k=0}^{n} (x_{k+2} - x_k) = x_{n+2} + x_{n+1} - x_1 - x_0$.	☐	☐
6.	Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quels que soient les réels $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n$, on a : $\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$.	☐	☐
7.	La somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j}$ contient $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.	☐	☐
8.	On considère une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et, pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a alors $S_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_{2k}$.	☐	☐
9.	Quel que soit l'entier naturel n non nul et quels que soient les réels strictement positifs $x_1,...,x_n$, on a : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$.	☐	☐
10.	Quel que soit l'entier naturel n non nul et quels que soient les réels $x_1,...,x_n$, on a : $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \prod_{k=1}^{n} x_k^2$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos-minute

❑ **Exercice 2.1.** — Écrire les sommes suivantes de façon symbolique (à l'aide du signe Σ) :

1. $A = 2+4+6+8+10$.

2. $B = 1+3+5+7+9$.

3. $C = 1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$.

❑ **Exercice 2.2.** — On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Montrer que la somme des n premiers entiers naturels impairs est égale à n^2.

❑ **Exercice 2.3.** — Calculer les sommes suivantes :

1. $S_m = \sum_{i=0}^{m} 3^{-i}$, avec m élément de $\mathbb{N}$.

2. * $T_n = \sum_{k=2}^{n+1} \left(k^3 - 3k^2 + 3k + 2\right)$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$ (on admet que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$).

3. * $U_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$.

4. $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$.

❑ **Exercice 2.4.** * — Formule de Bernoulli. Montrer que, quels que soient les réels a et b et l'entier naturel non nul n, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

❑ **Exercice 2.5.** *

1. Déterminer une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) = u_{k+1} - u_k$$

2. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$ en fonction de l'entier naturel non nul n.

❑ **Exercice 2.6.** * — On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Trouver trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

2. En déduire une expression de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n.

❑ **Exercice 2.7.** * — Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

1. Écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En utilisant la **méthode 2.3,** donner une expression de v_n en fonction de n. En déduire u_n.

❑ **Exercice 2.8.** * — On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme a_0 et par la relation $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k$, valable pour tout entier naturel n.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $a_n = 2^{n-1} a_0$.

❑ **Exercice 2.9.** * — Calculer les sommes suivantes :

1. $K_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} 1$, avec n dans $\mathbb{N}^*$.

2. $L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$, avec n dans $\mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

❑ **Exercice 2.10.** * — Calculer le produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ avec $n \geq 2$.

❑ **Exercice 2.11.** * — Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

❑ **Exercice 2.12.*** — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ en fonction de S_{2n+1} et de S_n.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 2.2. La somme des n premiers entiers impairs est $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

Exercice 2.3. Pour la question **2**, le calcul de T_n sera plus court et plus sûr en remarquant que $k^3 - 3k^2 + 3k + 2 = (k-1)^3 + 3$.
On pourra donc ensuite poser $i = k-1$.
Pour la question **3**, écrire $k = (k+1) - 1$ facilite le calcul de U_n.

Exercice 2.5. Utiliser les propriétés du logarithme népérien.

Exercice 2.6. Pour la question **2**, changer d'indice pour obtenir trois sommes de $\frac{1}{k}$.

Exercice 2.7. Pour la question **1**, on peut diviser la relation définissant la suite (u_n) par 2^{n+1}.

Exercice 2.8. Faire une récurrence et remarquer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a la relation $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Attention à l'initialisation.

Exercice 2.9. Pour la question **2**, intervertir les symboles Σ.

Exercice 2.10. Écrire :

$$\forall k \in \{2,3,...,n\},\ 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Exercice 2.11. Il faut multiplier le produit donné par $\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$.

Exercice 2.12. Séparer les termes pairs des termes impairs dans S_{2n+1}.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V

1. L'entier *k* est l'indice de la somme, il ne peut donc pas "sortir" de la somme.

2. La somme du membre de gauche contient tous les termes x_i dont les indices *i* sont compris entre 0 et 2*n* et sont pairs alors que la somme du membre de droite contient tous les termes x_i dont les indices sont compris entre 0 et 2*n*.

On a en fait : $\sum_{k=0}^{n} x_{2k} = x_0 + x_2 + ...x_{2n-2} + x_{2n}$ et $\sum_{i=0}^{2n} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{2n-1} + x_{2n}$

3. Procédons par récurrence.

- Pour $n=1$, on a $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1\times 4}{4} = 1 = 1^3 = \sum_{k=1}^{1} k^3$.
- Si l'on suppose, pour un certain n dans $\mathbb{N}^*$, que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, alors : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$.

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n+1} k - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $\sum_{k=2}^{n+1} k \neq \sum_{k=1}^{n} k$. En revanche, $\sum_{k=2}^{n+1} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1$ puisque dans chacune de ces sommes, on somme *n* fois 1.

5. $\sum_{k=0}^{n} (x_{k+2} - x_k) = \sum_{k=0}^{n} x_{k+2} - \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{j=2}^{n+2} x_j - \sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+2} + x_{n+1} - x_1 - x_0$.

On vient de faire un "double" télescopage.

6. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, on considère $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ et, pour tout *i* élément de $[\![2, n]\!], x_i = 0, y_i = 1$.

On a, d'une part $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0$, et d'autre part, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = 1\times(n-1) = n-1$ qui est différent de 0 car $n \geq 2$.

7. Il y a autant de termes dans une somme que de choix des valeurs que peuvent prendre les indices (chaque terme correspond à l'un de ces choix).
Or il y a n^2 couples d'entiers de $\{1,2,...,n\}$ et n couples d'entiers (i,j) tels que $i=j$, ce qui laisse n^2-n couples d'entiers (i,j) tels que $i \neq j$ et puisqu'il y a autant de couples (i,j) avec $i<j$ que de couples (i,j) avec $i>j$, on a bien $\frac{n(n-1)}{2}$ termes dans cette somme.

8. Ayant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, si l'on veut S_{2n}, il faut remplacer n par $2n$ et rien d'autre (la suite S est fonction de n seulement, la lettre k n'est que l'indice de la somme).
On a alors $S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$, ce qui est différent de $\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$ (voir le **V/F 2**).

9. Il s'agit de la généralisation de la propriété bien connue : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, valable pour tous réels a et b strictement positifs. Il suffit de faire une récurrence pour s'en convaincre.

10. Il s'agit de la généralisation de la propriété bien connue : $(ab)^2 = a^2b^2$, valable pour tous réels a et b. Ici aussi, on peut faire une démonstration par récurrence.

❑ Les erreurs classiques

- Dans une somme, il faut bien repérer l'indice et ne pas le sortir de la somme.
- L'indice d'une somme est muet et "n'a pas d'existence légale", la preuve c'est qu'on peut le remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{j=0}^{n} u_j$.

Aucun résultat d'une somme ne peut donc dépendre de l'indice de la somme.
- Dans un télescopage, il faut bien repérer quels sont les termes non communs aux deux sommes.
- Il est important de connaître le nombre de termes d'une somme simple ou d'une somme double.
- Rappelons que les seuls changements d'indice autorisés sont les suivants :
$i = k + \textit{constante}$ et $i = -k + \textit{constante}$ (la constante pouvant bien sûr être négative).
- Il ne faut pas confondre, et ceci n'est qu'un exemple, $\sum_{k=1}^{n} k-1$ avec $\sum_{k=1}^{n} (k-1)$.

Corrigé

Corrigé des exercices

Exercice 2.1

1. $A=\sum_{k=1}^{5}2k$ **2.** $B=\sum_{k=0}^{4}(2k+1)$ **3.** $C=\sum_{k=1}^{10}k(-1)^{k-1}$

Exercice 2.2

Tout entier naturel impair est de la forme $2k+1$ où k est un entier naturel.

On a $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}1$ d'après les **propriétés 2.5** et **2.6**.

On trouve alors : $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=2\frac{(n-1)n}{2}+n=(n-1)n+n=n^2$.

En conclusion, la somme des n premiers entiers naturels impairs vaut n^2.

Exercice 2.3

1. $S_m=\sum_{i=0}^{m}3^{-i}=\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{3}\right)^i=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{m+1}}\right)$, car $\frac{1}{3}\neq 1$.

2. On remarque que $k^3-3k^2+3k-1=(k-1)^3$. Par conséquent, on a :

$T_n=\sum_{k=2}^{n+1}\left((k-1)^3+3\right)$. En posant $i=k-1$, on trouve : $T_n=\sum_{i=1}^{n}\left(i^3+3\right)=\sum_{i=1}^{n}i^3+\sum_{i=1}^{n}3$.

On a alors : $T_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3n=\frac{n\left(n^3+2n^2+n+12\right)}{4}$.

⇨ *Méthode 2.1*

3. On a : $U_n=\sum_{k=1}^{n}k\,k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k!=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)k!-k!\right)$.

On en déduit :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!=(n+1)!-1 \text{ (par télescopage)}$$

⇨ *Méthode 2.3*

4. En faisant le changement d'indice $i = n-k$, on obtient : $V_n = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

⇨ *Méthode 2.2*

Exercice 2.4

Pour tout entier naturel n non nul, on trouve en développant :

$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$ (on a posé $j = k+1$ dans la première somme).

Par télescopage, on conclut : $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n - b^n$.

⇨ *Méthodes 2.1, 2.3*

Exercice 2.5

1. Pour tout entier naturel k non nul, on a : $\ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k+3}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$.

En posant $u_k = \ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$, on obtient donc : $\ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) = u_{k+1} - u_k$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right)$.

D'après la question **1**, on a : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$ (par télescopage).

Finalement, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3n+3}{n+3}\right)$.

⇨ *Méthode 2.3*

Exercice 2.6

1. Pour tout entier naturel k non nul, on a :

$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$. En ordonnant, ceci s'écrit :

$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)}$. On a donc :

$\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \Leftrightarrow \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)}$.

Ainsi, par identification des coefficients (des deux numérateurs), on trouve : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=4 \\ 2a=1 \end{cases}$.

Ceci équivaut à $\begin{cases} b+c=-\dfrac{1}{2} \\ 2b+c=\dfrac{5}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} c=-\dfrac{7}{2} \\ b=3 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{7}{2(k+2)}$.

2. Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{4k+1}{k(k+1)(k+2)}$.

D'après la question précédente, on a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2k} + \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{7}{2(k+2)} \right)$.

On en déduit : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{7}{2(k+2)} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + 3\sum_{j=2}^{n+1} \dfrac{1}{j} - \dfrac{7}{2}\sum_{l=3}^{n+2} \dfrac{1}{l}$, après avoir posé $j = k+1$ dans la deuxième somme et $l = k+2$ dans la troisième.

Ainsi, $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2} + \sum_{j=3}^{n} \dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{7}{2}\left(\sum_{l=3}^{n} \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)$.

D'où $S_n = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{7}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} + 3 - \dfrac{7}{2}\right) \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{7}{2(n+2)}$.

⇨ *Méthodes 2.1, 2.3*

Exercice 2.7

1. En divisant par 2^{n+1} la relation définissant la suite (u_n), on trouve : $v_{n+1} = v_n + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. On obtient ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, v_{k+1} - v_k = \dfrac{k(k-1)}{2}$.

On somme cette relation pour *k* allant de 0 à $n-1$ (avec $n \geq 1$) et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2}$$

On a donc : $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k$.

En utilisant un télescopage dans la somme du membre de gauche ainsi que les sommes de référence dans le membre de droite, on obtient : $v_n - v_0 = \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}$.

Puisque $v_0 = \dfrac{u_0}{2^0} = 1$, on a : $v_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{6}$.

On en déduit que $u_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{6} \times 2^n$ (ce qui est encore valable pour $n = 0$).

⇨ *Méthode 2.3*

Exercice 2.8

• Pour $n = 1$, on a bien, par définition de la suite (a_n) : $a_1 = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = 1 \times a_0 = 2^{1-1} a_0$.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à 1, que $a_n = 2^{n-1} a_0$, alors, par définition de la suite (a_n), on peut écrire :

$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n + a_n = 2a_n$. On a alors, par hypothèse de récurrence :

$$a_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} a_0 = 2^n a_0$$

On a bien montré la propriété au rang $n+1$.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{n-1} a_0$.

Exercice 2.9

1. Pour déterminer la valeur de cette somme, il suffit de connaître le nombre de termes de la somme, c'est-à-dire le nombre de couples d'entiers naturels (i, j) de $\{1, 2, ..., n\}$ tels que $i < j$.

On a déjà dénombré (dans la question **7** du Vrai/Faux) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tels couples.

Il en résulte que : $K_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque. On pouvait aussi écrire : $K_n = \sum_{1 \le i < j \le n} 1 = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. $L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{i}{j}$. Dans la somme intérieure, on a $i + 1 \le j \le n$, et dans la somme extérieure, on a $1 \le i \le n - 1$, on a donc : $2 \le j \le n$ (j ne peut pas prendre la valeur 1) et $1 \le i \le j - 1$ (car $i + 1 \le j$).

$L_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \dfrac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n} \dfrac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i \right) = \sum_{j=2}^{n} \dfrac{1}{j} \times \dfrac{(j-1)j}{2}$ (on a reconnu une somme usuelle).

$L_n = \dfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k$ (changement d'indice $k = j - 1$).

Corrigé

On en conclut que $L_n = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

⇨ *Méthode 2.5*

Exercice 2.10

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} \right)$.

D'où $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}$ et par télescopage dans chaque produit, on obtient : $P_n = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 2.11

En multipliant en haut et en bas par $\prod_{k=1}^{n} (2k)$, on a : $\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k+1) \times \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)}$.

Le numérateur de cette expression est constitué du produit de tous les entiers pairs compris entre 2 et $2n$ multiplié par le produit de tous les entiers impairs compris entre 3 et $2n+1$, c'est-à-dire tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$. On obtient ainsi : $\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^{n} (2k)}$.

De plus, $\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$, on en déduit donc:

$$\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 2.12

On a $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$.

En regroupant d'une part les termes pairs, et d'autre part les termes impairs, on peut écrire :

$S_{2n+1} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n+1}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n})$.

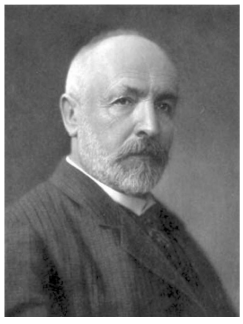
On a alors : $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} S_n$.

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = S_{2n+1} - \frac{1}{2} S_n$$

Chapitre 3
Ensembles

UN MATHÉMATICIEN



« *L'essence même des mathématiques, c'est leur liberté* » disait **Georg Cantor**, mathématicien allemand né à Saint Pétersbourg, connu pour avoir été le père de la théorie des ensembles. C'est dans les années 1870 qu'il fonde cette théorie en lien avec son compatriote Richard Dedekind et qu'il définit la notion de cardinal pour les ensembles infinis. Ses théories révolutionnaires furent mal accueillies par certains mais sont désormais acceptées par tous.

Un peu d'histoire

La théorie des ensembles est un cadre dans lequel s'inscrivent toutes les branches des mathématiques. Au tout début des années 1870, Georg Cantor s'intéresse aux points où certaines fonctions ont des comportements atypiques. Cela l'amène à étendre la notion de cardinal (nombre d'éléments) à des ensembles infinis. Il montre que des ensembles infinis peuvent avoir le même cardinal, comme une droite et un plan, mais qu'aussi, il existe différents cardinaux infinis.

Le mathématicien Giuseppe Peano rédige en 1895 un formulaire mathématique qui popularise cette théorie dans lequel il introduit plusieurs symboles que nous utilisons encore.

Le logicien anglais Bertrand Russell énonce un paradoxe qui montre que l'on ne peut nommer ensemble n'importe quoi. Pour pallier ce problème, Ernst Zermelo définit des axiomes sur lesquels doit s'appuyer la théorie des ensembles.

Objectifs

les incontournables

- Savoir démontrer qu'un ensemble est inclus dans un autre.
- Savoir démontrer que deux ensembles sont égaux.
- Savoir manipuler les opérations sur les ensembles.

et plus si affinités

- Savoir manipuler les intersections et réunions de plus de 2 ensembles.

■■ Résumé de cours

Ce chapitre est très utile pour les probabilités et devra être revu à cette occasion.

■ Ensembles et éléments

❑ Définitions, exemples et notations

Définition 3.1. — On définit un *ensemble* si l'on est capable d'affirmer sans ambiguïté qu'un objet appartient ou non à cet ensemble : on dit alors que cet objet est un *élément* de l'ensemble. En principe, on regroupe dans un ensemble des éléments ayant une propriété en commun.

On peut décrire un ensemble en extension, en donnant entre accolades la liste de ses éléments, comme $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, ou en compréhension, c'est-à-dire, entre accolades toujours, en nommant les éléments, puis après une virgule, en les décrivant, ce qui, avec l'exemple précédent donne $E = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}\}$.

Notation 3.1. — Soit a et b deux entiers. L'ensemble des entiers compris entre a et b, est noté $[\![a,b]\!]$, et est défini en compréhension par : $[\![a,b]\!] = \{i \in \mathbb{Z}, a \leq i \leq b\}$.

Conventions — On note les ensembles par des majuscules et leurs éléments par des minuscules.
On écrit "$x \in E$" pour traduire que "x appartient à E" ou encore que "x est élément de E".
On écrit "$x \notin E$" pour traduire que "x n'appartient pas à l'ensemble E".
Le seul ensemble ayant zéro élément est l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$.

❑ Produit cartésien de deux ensembles

Définition 3.2. — Le produit cartésien des ensembles A et B est l'ensemble noté $A \times B$, on lit "A *croix* B", constitué de tous les couples dont la première composante appartient à A et la deuxième à B. On a donc :

$$A \times B = \{ (x, y), x \in A \text{ et } y \in B \}$$

Remarque 3.1. — $A \times A$ est noté A^2.

Définition 3.3. — De la même façon, on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'ensemble $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, …, $x_n \in A_n$.
On a donc :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i \}$$

Remarque 3.2. — $\underbrace{A \times A \times \ldots A}_{n \text{ fois}}$ est noté A^n.

Exemple 3.1. — $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels et $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

■ Comparaison des ensembles

❑ Inclusion

Définition 3.4. — On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

⇨ **Méthode 3.1. Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre grâce à la définition ?**

Remarque 3.3. — Par convention, l'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble.

❑ Égalité

Définition 3.5. — On dit que deux ensembles A et B sont égaux, on note $A = B$, lorsque l'on a :

$$A \subset B \text{ et } B \subset A$$

⇨ **Méthode 3.4. Comment montrer que deux ensembles sont égaux grâce à la définition ?**

❑ Ensemble des parties d'un ensemble

Définitions 3.6. — On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un sous-ensemble de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 3.4. — Les phrases "$A \subset E$" et "$A \in \mathcal{P}(E)$" ont la même signification.

■ Opérations

Dans ce paragraphe, on considère des ensembles qui sont tous des parties d'un ensemble de référence, noté Ω (cette lettre est la lettre grecque omega majuscule).

❑ Intersection

Définition 3.7. — L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, (on lit "A inter B") constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On a donc :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

Définition 3.8. — De la même façon, on définit, pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, noté $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ (l'intersection se réduit à A_1 si $n = 1$). On a alors :

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], x \in A_k$$

Définition 3.9. — On définit aussi l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$, et on a : $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, x \in A_k$.

Propriété 3.1. — L'intersection est commutative : $A \cap B = B \cap A$.

Propriété 3.2. — L'intersection est associative : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Propriété 3.3. — $A \cap A = A$.

Propriété 3.4. — $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Propriété 3.5. — Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.

❑ Réunion

Définition 3.10. — La réunion des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, (on lit "A union B") constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B. On a donc :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Remarque 3.5. — Le "ou" utilisé ci-dessus est dit inclusif : on peut avoir $x \in A \cap B$.

Définition 3.11. — De la même façon, on définit, pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, noté $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (la réunion se réduit à A_1 si $n = 1$). On a alors :

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!], x \in A_k$$

Définition 3.12. — On définit aussi l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, et on a : $x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in A_k$.

Propriété 3.6. — La réunion est commutative : $A \cup B = B \cup A$.

Propriété 3.7. — La réunion est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

Propriété 3.8. — $A \cup A = A$.

Propriété 3.9. — $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Propriété 3.10. — $\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Propriété 3.11. — L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriété 3.12. — Un ordre à connaître :

$$A \cap B \subset A. \qquad A \subset A \cup B$$

⇨ **Méthode 3.2. Comment montrer que *E* est inclus dans *F* en écrivant *E* = *F* ∩ *G* ?**
⇨ **Méthode 3.3. Comment montrer que *E* est inclus dans *F* en écrivant *F* = *E* ∪ *G* ?**

❑ Complémentaire

Définition 3.13. — Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$ (on lit "A barre"), contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a donc : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

Propriété 3.13. — Quelques évidences : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Propriété 3.14. — $\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Propriété 3.15. — Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Propriété 3.16. — $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

⇨ **Méthode 3.5. Comment montrer que deux ensembles sont égaux en utilisant les propriétés des opérations ?**

■ Ensembles dénombrables, ensembles finis

❑ Ensemble dénombrable

Définition 3.14. — Un ensemble E est dit dénombrable si, à chaque élément de E on peut faire correspondre un unique entier naturel et si, à chaque entier naturel, on peut faire correspondre un unique élément de E. On dit alors qu'il existe une *bijection* de E sur $\mathbb{N}$ (voir la définition d'une bijection au **chapitre 4**).

Remarque 3.6. — Un ensemble E est dénombrable si on peut "numéroter" ses éléments avec tous les entiers naturels (on dit que les éléments de l'ensemble sont indexés par $\mathbb{N}$).

Exemple 3.2. — Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

❑ Ensemble fini

Définitions 3.15. — Un ensemble E est dit fini, s'il possède un nombre fini n d'éléments.
Le nombre n est appelé *cardinal* de E et est noté $\text{card}(E)$. On a $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Définitions 3.16. — On appelle *singleton* tout ensemble possédant un seul élément.
On appelle *paire* tout ensemble possédant deux éléments.

■■ Méthodes

■ Inclusion

❑ Méthode 3.1. Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre grâce à la définition ?

Pour montrer que A est inclus dans B, on prend un élément x quelconque de A et on prouve que x appartient à B.

⇨ Exercices 3.1, 3.2, 3.8

Exemple. Soit A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que $A \subset B$.
Soit n un élément de A, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 6p = 2\times 3p$, ce qui prouve que n est multiple de 2 et appartient donc à B. Ainsi, $A \subset B$.

❑ Méthode 3.2. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $E = F \cap G$?

Pour montrer que E est inclus dans F, on peut écrire E comme l'intersection de F et d'un autre ensemble G et utiliser le fait que $F \cap G \subset F$.

⇨ Exercice 3.3

Exemple. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
$E = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x-2 \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 5\} = F \cap G$, avec $G = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x\}$. On a donc bien $E \subset F$.

❑ Méthode 3.3. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $F = E \cup G$?

Pour montrer que E est inclus dans F, on peut écrire F comme la réunion de E et d'un autre ensemble G et utiliser le fait que $E \subset E \cup G$.

⇨ Exercice 3.3

Exemple. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| > 2\}$. Montrer que $E \subset F$.
$F = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| > 2\} = \{x \in \mathbb{R}, x-3 > 2 \text{ ou } x-3 < -2\} = \{x \in \mathbb{R}, x > 5 \text{ ou } x < 1\}$.
On a donc bien : $F = E \cup G$, avec $G = \{x \in \mathbb{R}, x > 5\}$. Par conséquent : $E \subset F$.

■ Égalité d'ensembles

❑ Méthode 3.4. Comment montrer que deux ensembles sont égaux grâce à la définition ?

Pour montrer que $A = B$, on peut procéder par double inclusion.

⇨ Exercices 3.6, 3.8

Exemple. Montrer que, si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
Montrons dans un premier temps, que $A \subset B$.
Soit x un élément de A, alors, comme $A \subset A \cup B$, $x \in A \cup B$, mais $A \cup B = A \cap B$, on en déduit donc que $x \in A \cap B$, ce qui montre que, en particulier, $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
De la même façon, on montre que $B \subset A$ et on conclut par double inclusion que $A = B$.

❑ Méthode 3.5. Comment montrer que deux ensembles sont égaux en utilisant les propriétés des opérations ?

Pour montrer que $A = B$, on peut procéder par égalités successives en transformant A jusqu'à obtenir B.

⇨ Exercices 3.4, 3.5, 3.9

Exemple. On considère 2 parties, E et F, de Ω. On pose $A = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap F)$.
Montrer que $A = E \cup F$.
Par associativité de la réunion, on a : $A = [(E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})] \cup (\overline{E} \cap F)$.
Par distributivité de l'intersection sur la réunion : $A = [E \cap (F \cup \overline{F})] \cup (\overline{E} \cap F)$.
$A = [E \cap \Omega] \cup (\overline{E} \cap F) = E \cup (\overline{E} \cap F)$, car $E \subset \Omega$, ce qui implique $E \cap \Omega = E$.
Par distributivité de la réunion sur l'intersection, on obtient : $A = (E \cup \overline{E}) \cap (E \cup F)$.
$A = \Omega \cap (E \cup F)$, et pour finir : $A = E \cup F$, car $E \cup F \subset \Omega$.