Annales
corrigées et commentées

Concours
2022/2023/2024/2025

PC PSI BCPST

Maths

X
ENS
ESPCI

ellipses

Farouk Boucekkine
Alex Panetta
Alain Patey

Avant-propos

Le présent ouvrage regroupe les corrigés des épreuves de mathématiques tombées aux concours X-ENS pour les filières BCPST, PC et PSI entre les années 2022 et 2025.

Si les programmes de ces trois filières peuvent différer sur certains points, ils sont assez proches pour qu'un étudiant de ces trois filières s'entraîne avantageusement sur chacun des sujets contenus dans ce livre.

Les thèmes traités dans ces sujets sont les suivants :

BCPST ENS 2022 :
- Épidémiologie mathématique : un modèle probabiliste et deux modèles déterministes
- Probabilités
- Variables aléatoires
- Équations différentielles

BCPST ENS 2023 :
- Polynômes
- Équations différentielles
- Permutations
- Probabilités
- Algorithmique

BCPST ENS 2024 :
- Équations différentielles
- Réduction de matrices carrées
- Polynômes

BCPST ENS 2025 :
- Variables normales
- Recherche du meilleur estimateur de l'espérance dans différents cas
- Calculs matriciels
- Application à l'étude d'un arbre phylogénétique

PC X-ENS-ESPCI 2022 :

- Fonctions d'une variable réelle
- Espaces vectoriels normés
- Fonctions de plusieurs variables
- Intégrales à paramètre

PC X-ENS-ESPCI 2023 :

- Espaces vectoriels normés
- Réduction des matrices carrées
- Variables aléatoires

- Espaces euclidiens

PC X-ENS-ESPCI 2024 :

- Espaces vectoriels normés
- Espaces euclidiens
- Réduction des matrices carrées

PC X-ENS-ESPCI 2025 :

- Espaces euclidiens
- Réduction des matrices carrées
- Variables aléatoires

PSI X-ENS 2022 :
- Espaces vectoriels normés
- Convexité
- Systèmes linéaires

PSI X-ENS 2023 :
- Espaces euclidiens
- Convexité
- Calcul différentiel
- Probabilités

PSI X-ENS 2024 :
- Séries entières
- Réduction des endomorphismes
- Polynômes

PSI X-ENS 2025 :
- Convexité
- Calcul différentiel
- Espaces vectoriels normés

Chapitre 1

BCPST ENS 2022

Début de l'épreuve

Le sujet comprend 4 pages numérotées de 1 à 4. Il porte sur deux modèles d'épidémiologie. Il comporte deux parties indépendantes (à l'exception des questions 4 et 10.b).

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Début de l'épreuve

Première partie : Un modèle probabiliste pour la propagation des épidémies

On considère un modèle probabiliste pour représenter une épidémie. Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indexée par deux entiers $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires ont une même loi de référence X admettant une espérance.

Soit $(Z_n)_n$ le nombre de personnes infectées lors de la n-ième semaine. On suppose que chacune des Z_n personnes infectées à la semaine n contamine à son tour un nombre aléatoire de personnes, respectivement $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,Z_n}$ lors de la semaine suivante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}.$$

On suppose $Z_0 = 1$, c'est-à-dire que l'épidémie démarre avec un unique patient zéro. On note

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k := \mathbb{P}(X = k) \text{ et } m := \mathbb{E}(X).$$

On fait l'hypothèse que

$$p_0 > 0, \quad p_0 + p_1 < 1.$$

Enfin, on définit

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi(t) := \mathbb{E}\left(t^X\right).$$

1. a) Montrer que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k.$$

On admettra que ϕ est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1}.$$

b) Montrer que ϕ est croissante, que $\phi(0) = p_0$, que $\phi(1) = 1$ et que $\phi'(1) = \mathbb{E}(X) = m$.
Soit $\phi_n(t) := \mathbb{E}\left(t^{Z_n}\right)$ pour tout $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}(t) = \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right) \mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j} X_{n,k}}\right).$$

b) Montrer que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \phi_{n+1}(t) = \phi_n(\phi(t))$$

et que

$$\forall 0 < t \leqslant 1, \quad \phi_n(t) = \phi \circ \ldots \circ \phi(t)$$

(c'est-à-dire qu'on compose n fois la fonction ϕ pour obtenir ϕ_n).

c) Montrer que $\mathbb{E}\left(Z_{n+1}\right) = m\mathbb{E}\left(Z_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = m^n$.
On définit

$$\tau := \inf\left\{n \geqslant 0 \mid Z_n = 0\right\},$$

cette quantité pouvant éventuellement valoir $+\infty$, et

$$\xi := \mathbb{P}(\tau < +\infty).$$

3. a) Expliquer pourquoi ξ est la probabilité d'extinction de l'épidémie.

b) Montrer que $\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 0\right) \geqslant \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$ (on pourra pour cela remarquer que les évènements $C_n := \left\{Z_n = 0 \text{ et } Z_{n-1} \neq 0\right\}$ sont deux à deux incompatibles).

c) Calculer $\phi_n(0)$ et montrer que $\phi(\xi) = \xi$.

d) Montrer que si $\zeta \in [0,1]$ est un autre point fixe de ϕ, alors $\phi_n(0) \leqslant \zeta$ pour tout n.

e) En déduire que $\xi \leqslant \zeta$, puis que $\xi = \min\{x \in [0,1] \mid \phi(x) = x\}$ et expliquer pourquoi cette quantité est bien un minimum.
On admettra que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et que

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2}.$$

4. a) Montrer que $\phi''(t) > 0$ sur $]0,1[$.

b) En déduire que $\phi(t) > m(t-1) + 1$ pour tout $t \in]0,1[$.

c) Montrer que $\xi = 1$ si $m \leqslant 1$.

d) Si $m > 1$, montrer que $\xi < 1$. On pourra pour cela étudier le signe de $\phi(x) - x$ aux voisinages de 0^+ et de 1^-.
On note pour deux entiers naturels $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$: $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$.
Par convention, $0! = 1$ et $C_n^k = 0$ si $k > n$.

5. On suppose que X suit une loi binomiale : $p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $q \in (0,1)$. Calculer ϕ dans ce cas. Calculer ξ en fonction de q dans le cas $n = 2$.

6. a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]0,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

b) On suppose que X suit une loi binomiale négative, définie par : $p_k = \binom{k+n-1}{k}(1-q)^n q^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $q \in (0,1)$. Calculer ϕ dans ce cas. En déduire m.

c) On suppose de plus que $n = 2$. Montrer que

$$(1-q)^2 = \xi(1 - q\xi)^2.$$

En remarquant que 1 est solution de cette équation, montrer que ξ est solution d'une équation polynomiale d'ordre 2. En déduire ξ en fonction de q en distinguant les cas.

Deuxième partie : Un modèle déterministe pour la propagation des épidémies

On considère maintenant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) &= \gamma I(t), \\ S(0) &= S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.
On admettra qu'il existe une solution $(S(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geqslant 0$.

7. Si $S(t)$ représente le nombre de personnes n'ayant pas encore contracté la maladie, $I(t)$ le nombre de personnes infectées et $R(t)$ le nombre de personnes guéries et désormais immunisées contre la maladie au temps t, expliquer brièvement en quoi ce système est pertinent pour décrire la propagation d'une épidémie et sous quelles hypothèses il est pertinent. Expliquer pourquoi, sous ces hypothèses, $1/\gamma$ peut-être interprété comme la période de contagiosité de chaque individu infecté.

8. a) Exprimer $S(t)$ en fonction de S_0, β et $\int_0^t I(s)\mathrm{d}s$. En déduire que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
b) De même, montrer que $I(t) > 0$ pour tout $t > 0$. En déduire que $R(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
c) Montrer que $S + I + R$ ne dépend pas du temps. En déduire que ces quantités sont toutes bornées.
d) Montrer que S et R convergent quand $t \to +\infty$, vers des quantités qu'on notera respectivement S_∞ et R_∞. En déduire que I converge quand $t \to +\infty$, vers une quantité qu'on notera I_∞.

9. a) Supposons que $S_\infty \geqslant \gamma/\beta$. Montrer qu'alors I est croissante et en déduire une contradiction.
b) Montrer que $I_\infty = 0$.
c) Tracer les tableaux de variations de S, I et R. On distinguera les cas $\beta S_0/\gamma \leqslant 1$ et $\beta S_0/\gamma > 1$.

10. a) Montrer que l'épidémie se propage, c'est-à-dire que le maximum de $t \mapsto I(t)$ sera strictement plus grand que I_0, si et seulement si $\beta S_0/\gamma > 1$.
b) Comparer ce critère à celui obtenu question 4.

11. Montrer que $\ln S - \frac{\beta}{\gamma}(S + I)$ ne dépend pas du temps.

12. a) En déduire une relation sur S_∞, S_0, I_0, β et γ.
b) En déduire que, si l'on considère S_∞ comme une fonction de I_0, alors S_∞ est strictement décroissante en I_0. Cela vous paraît-il logique ?

13. a) À l'aide de la relation déduite à la question 11, calculer le maximum de $t \mapsto I(t)$ en fonction de β, γ, I_0 et S_0, dans le cas où $\beta S_0/\gamma > 1$.
b) On suppose que $\beta S_0/\gamma = 4$, que $S_0 = 7 \times 10^7$ et que $I_0 = 1$. À l'aide de la relation $\ln 4 \simeq 1,4$, calculer une approximation du maximum de $t \mapsto I(t)/S_0$.

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ E'(t) &= \beta S(t)I(t) \quad -\alpha E(t), \\ I'(t) &= \alpha E(t) \quad -\gamma I(t), \\ R'(t) &= \gamma I(t), \\ S(0) &= S_0, \; E(0) = 0, \; I(0) = I_0, \; R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, α, β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.
On admettra qu'il existe une solution $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geqslant 0$. On admettra également que $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ restent strictement positifs pour tous les temps $t > 0$.

14. a) Comment interpréter la quantité $E(t)$?

b) Étudier cette équation (on pourra commencer par tracer le tableau de variations de $t \mapsto E(t) + I(t)$). Trouver en particulier une condition garantissant la propagation de l'épidémie et calculer le maximum de $t \mapsto E(t) + I(t)$.

Fin de l'épreuve

Corrigé

Commentaires

Ce sujet est très intéressant, mais comporte des passages qui demandent commentaires et compléments car ils nécessitent des résultats qui ne sont plus au programme ou n'y ont jamais été. Heureusement, la plupart du temps, c'est assez intuitif, mais parfois cela peut créer des difficultés à des élèves portés sur la rigueur et n'ayant pas vu auparavant des résultats hors-programme.

Il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'un sujet des ENS et que le but n'est pas seulement de vérifier la rigueur des candidats, mais aussi leur inventivité et leur capacité d'adaptation. Plus précisément, pour citer le rapport de l'épreuve :

> Les notes obtenues par les candidats admissibles sont comprises entre 1 et 20. La moyenne est de 10,22 , l'écart-type de 3,69 . On peut estimer que la seule mobilisation des connaissances issues du lycée (et revues en classes préparatoires) permettait d'obtenir environ 7 points. En répondant aux questions relevant d'une application immédiate du cours de classes préparatoires, les candidats pouvaient atteindre 12 points. Pour aller au-delà il fallait savoir appliquer le cours dans des situations plus complexes.

À ce titre, ce sujet est assez exemplaire :

- un thème très important (et même fondateur) en BioMathématiques
- des parties du programme très complémentaires (probabilités discrètes, polynômes, fonctions réelles et équations différentielles)
- des questions qui ne se réduisent pas à « appliquer la méthode vue en cours »
- mais aussi la nécessité pour certaines questions de se détacher de la rigueur pure habituelle en cours de maths... avec le risque d'injustices que cela comprend.

Pour les candidat(e)s intéressé(e)s par les ENS, il paraît capital d'être prêt à être confronté à ce genre de situation, d'autant plus que dans ce concours, les questions traitées (même partiellement) par un petit nombre de candidats sont celles qui rapportent le plus.

Première Partie : Un modèle probabiliste pour la propagation des épidémies

1. a) • D'après le théorème de transfert :
sous réserve de convergence absolue, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.\mathbb{P}\left(X = k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.t^k.$$

• Montrons que cette série converge bien pour tout $t \in [0,1]$:
Soit $t \in [0,1]$.
La série $\sum_{k\geqslant 0} p_k.t^k$ est à termes positifs, donc sa convergence équivaut à sa convergence absolue.
D'autre part, comme $t \in [0,1]$, on a $t^k \in [0,1]$, donc

$$0 \leqslant p_k.t^k \leqslant p_k$$

Enfin, la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X=k)$ converge (vers 1) puisque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

<u>*Conclusion*</u> : D'après le théorème de comparaison des séries termes positifs, pour tout $t \in [0,1]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k.t^k$ converge (absolument), et donc :

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.t^k.}$$

b) • On a ϕ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et l'énoncé admet que :

$$\forall t \in]0,1[, \phi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.p_k.t^{k-1} \geqslant 0$$

(puisque p_k est une probabilité et $t \geqslant 0$).

<u>*Conclusion*</u> : $\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est bien croissante sur } [0,1].}$

Rappel de cours

• Cette question nous donne l'occasion de rappeler les hypothèses du théorème qui permet de déterminer la monotonie de f sur un intervalle $[a,b]$ en fonction du signe de la dérivée de f :

- f est supposée continue sur $[a,b]$ (la continuité doit comprendre les bornes).
- f est supposée dérivable sur $]a,b[$ (la dérivabilité aux bornes n'est pas nécessaire).

• Rappelons au passage une subtilité sur la conclusion de ce résultat, qui n'est pas exactement la même selon qu'on recherche la monotonie stricte ou la simple monotonie. En supposant vérifiées les conditions précédentes :

- f est croissante (au sens large) sur $[a,b]$ $\boxed{\text{si et seulement si}}$ f' est positive ou nulle sur $]a,b[$ (c'est une équivalence).
- $\boxed{\text{Si}}$ f' est strictement positive sur $]a,b[$, $\boxed{\text{alors}}$ f est strictement croissante sur $[a,b]$ (ce n'est pas une équivalence : f' peut s'annuler en un nombre fini de points de $]a,b[$, f restera strictement croissante).

Commentaires

Enfin, remarquons que l'usage de la dérivée n'est pas nécessaire pour faire cette question : soient $t, t' \in [0,1]$ tels que $t < t'$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $t^k < (t')^k$. De plus comme $p_k \geqslant 0$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k.t^k \leqslant p_k.(t')^k$$

et finalement :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.t^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.(t')^k = \phi(t').$$

<u>*Conclusion*</u> : la fonction ϕ est bien croissante sur $[0,1]$.

• On a $\boxed{\phi(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.1^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1}$ car les $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements.

- D'après le résultat admis dans l'énoncé, on a :

$$\boxed{\phi'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.p_k.1^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k.p_k = \mathbb{E}(X) = m.}$$

2. a) • Comme dans la question **1.a**, on montre que

$$\forall t \in [0,1], \phi_{n+1}(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = i).t^i.$$

- À l'aide du système complet d'événements $(Z_n = j)_{j\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}((Z_n = j) \cap (Z_{n+1} = i)).$$

Commentaires

On pourrait aussi rédiger à l'aide de la « formule des probabilités totales » sous sa forme conditionnelle :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i) \quad = \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j).\mathbb{P}(Z_{n+1} = i|Z_n = j)$$

même si on n'est pas sûr d'avoir l'hypothèse $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z_n = j) \neq 0$.

Même si la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Z_{n+1} = i|Z_n = j)$ n'est pas forcément définie, le programme de BCPST permet de poser formellement par convention $\mathbb{P}(Z_n = j).\mathbb{P}(Z_{n+1} = i|Z_n = j) = 0$ dans le cas où $\mathbb{P}(Z_n = j) = 0$.
L'auteur a préféré utiliser la rédaction sans conditionnement, car ce dernier disparaît de toutes façons du fait de l'argument d'indépendance que nous allons utiliser.

Or d'après l'énoncé, si $Z_n = j$, alors $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{j} X_{n,k}$, donc :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) = \mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{j} X_{n,k} = i\right] \cap (Z_n = j)\right).$$

Comme par définition :

- $Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{n-1,k}$
- Les variables $(X_{n,k})$ sont mutuellement indépendantes

une application *un peu laxiste* du lemme des coalitions donne que

$$\boxed{\text{les variables } \sum_{k=1}^{j} X_{n,k} \text{ et } Z_n \text{ sont indépendantes.}}$$

Rappel de cours

(Lemme des coalitions)

> Si les variables $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, et si u et v sont deux fonctions respectivement à n et p variables, alors les variables $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Ici, il nous permet de dire que comme $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{n-1,k}$ s'exprime comme somme de « certaines » variables $X_{n-1,k}$, et que les variables $X_{n,k}$ sont par hypothèse indépendantes de ces dernières, on en déduit que Z_n est indépendant des $X_{n,k}$, et donc de leur somme.

Cependant, il est à noter que le lemme des coalition fonctionne fondamentalement avec un nombre de variables borné à l'avance, or, comme on n'a pas de borne pour la valeur de Z_{n-1}, la somme précédente est certes finie, mais de taille arbitrairement grande... Donc techniquement, le raisonnement précédent sort du programme...

- Ainsi : $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left((Z_n = j) \cap (Z_{n+1} = i)\right) = \mathbb{P}\left(Z_n = j\right).\mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{j} X_{n,k} = i\right)$, et donc :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = i\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right).\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j} X_{n,k} = i\right).}$$

- On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,1], \phi_{n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = i\right).t^i. \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right).\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j} X_{n,k} = i\right) \right) t^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right).\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j} X_{n,k} = i\right) t^i \right).
\end{aligned}$$

Commentaires

(Complément sur les inversions de sommes infinies)

• Ici, comme souvent lorsqu'on a affaire à une double somme, on va inverser les symboles $\sum$. Mais il y a un tout petit problème, lié à une simplification excessive du programme : le *Théorème de Fubini* qui permet l'interversion des sommes ***infinies*** n'est plus au programme ! Il s'appliquerait sans difficulté ici, car tous les termes sont positifs et toutes les séries convergent (sommes des termes d'une loi de probabilité) mais techniquement, on ne peut pas le citer.

• Les concepteurs du programme ont certainement supprimé ce théorème pour éviter que certains sujets ne perdent les candidats dans de la technicité jugée inutile en BCPST. Cela exclut notamment la formule de transfert dans le cas de couples de variables aléatoires infinies. Mais en réalité, il y a plusieurs points bien au programme (comme la formule des probabilités totales) qui l'utilisent implicitement !

Bref, dans ce genre de situation, le plus sage est d'admettre qu'on peut inverser les sommes en montrant bien qu'on connaît les limites du programme.

On admet ici (car il n'y a pas de théorème d'interversion de sommes infinies au programme en BCPST) que l'on a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,1], \phi_{n+1}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right).\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}=i\right)t^i\right)\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right).\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}=i\right)t^i\right).
\end{aligned}$$

- Enfin :
  - Pour $j \geqslant 1$: la formule de transfert donne

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}=i\right)t^i = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}\right)\right).$$

  - Pour $j=0$: on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}=0$ et $t^j=1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in]0,1]\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+1}(t) = \mathbb{P}\left(Z_n=0\right) + \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right)\mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}}\right).}$$

b) • Montrons que $\forall\ 0<t\leqslant 1,\quad \phi_{n+1}(t)=\phi_n(\phi(t))$: Soient $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$.

– D'une part, comme vu dans la réponse de la question précédente (avant d'extraire l'indice $j=0$), on a :

$$\phi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right)\mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}}\right).$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j}X_{n,k}}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{j}t^{X_{n,k}}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{j}\mathbb{E}\left(t^{X_{n,k}}\right)\\
&\quad \text{(par indépendance des variables } X_{n,k}\text{, donc aussi des } t^{X_{n,k}}\text{)}\\
&= \phi(t)^j.
\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\phi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right)\phi(t)^j.$$

– D'autre part, on a par définition :

$$\phi_n(\phi(t)) = \mathbb{E}\left(\phi(t)^{Z_n}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=j\right).\phi(t)^j.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}(t) = \phi_n(\phi(t)).}$$

Commentaires

Ne pas oublier qu'il est parfois plus simple de montrer que deux quantités A et B sont égales en partant successivement de l'une et de l'autre, et de trouver une quantité C telle que « d'une part $A = C$, d'autre part $B = C$ » !

• Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_n = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ composées}}$:

Initialisation : C'est évident pour $n = 1$, car $\phi_1 = \phi$ par définition.
Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang n. On a alors d'après la première partie de la question :

$$\begin{aligned}\forall t \in]0,1], \phi_{n+1}(t) &= \phi_n(\phi(t)) \\ &= (\underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}})(\phi(t)) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{n+1 \text{ fois}})(t).\end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_n = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ composées}}.}$$

Commentaires

Comparativement à ce qui précède, cette récurrence est totalement évidente, et repose sur le simple fait que

$$\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi = \phi \circ (\phi \circ \cdots \circ \phi) = (\phi \circ \cdots \circ \phi) \circ \phi.$$

On pourrait ainsi rédiger assez honnêtement que le résultat se déduit de ce qui précède par une récurrence immédiate.

Toutefois comme on est en début de sujet, on peut se permettre une rédaction bien propre, « pour montrer au correcteur qu'on sait rédiger les récurrences évidentes », afin d'aller plus vite plus tard.

c) • Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, E(Z_{n+1}) = m.E(Z_n)$:

Commentaires

Complément sur les séries génératrices, cœur de ce sujet
Ici, on voit une maladresse de l'énoncé. La réponse à cette question repose sur le fait que le résultat suivant, admis en début d'énoncé, s'applique aussi à la fonction ϕ_n :

« On admettra que $\boxed{\phi}$ est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et que
$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \boxed{\phi'(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1}.$$ »

En fait, ceci est un cas particulier d'une théorie très générale sur les ***Fonctions Génératrices des variables aléatoires***, reposant sur la théorie des ***Séries Entières***, qui est largement hors-programme en BCPST.

Pour toute variable aléatoire Y **à valeurs entières positives** définie sur un espace probabilisé, on définit sa fonction génératrice :

$$G_Y : t \longmapsto \mathbb{E}\left(t^Y\right) \underbrace{=}_{\text{Th.Transfert}} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)\, t^n$$

Cette fonction a de nombreuses propriétés, parmi lesquelles :

- G_Y est définie, continue et croissante (au moins) sur $[0,1]$, avec $G_Y(0) = \mathbb{P}(Y=0)$ et $G_Y(1) = 1$.
- G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur (au moins) $[0,1[$ et ses dérivées successives se calculent par dérivation terme à terme (comme des polynômes).
- Y admet une espérance si et seulement si G_Y est dérivable en 1, et dans ce cas $G_Y'(1) = \mathbb{E}(Y)$.
- Deux variables aléatoires ont même fonction génératrice si et seulement si elles ont même loi.

etc.

Notons que dans le cas des variables entières ***finies***, ces propriétés se montrent facilement (ce sont des exercices qu'on peut donner dès la première année) puisque G_Y est un polynôme.

Dans notre problème, ϕ est la fonction génératrice de X et ϕ_n celle de Z_n.

• Comme dans la **question 1.a**, on peut montrer avec le théorème de transfert que :

$$\forall t \in]0,1], \phi_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\, t^k$$

En considérant qu'on peut étendre le résultat admis en préambule sur la dérivabilité de ϕ à la la fonction ϕ_n, on a :

Pour tout entier n, la fonction ϕ_n est continue sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et :

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi_n'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Z_n =)\, t^{k-1}.$$

• On en déduit, comme dans la **question 1.a**, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Z_n) = \phi_n'(1).$$

• Par ailleurs, nous avons vu dans la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1} = \phi \circ \phi_n.$$

Par conséquent, par dérivation d'une composée :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \phi'_{n+1}(1) &= \phi'_n(1).\phi'(\phi_n(1)) \\ &= \mathbb{E}(Z_n).\phi'(1) \quad \text{car, comme en } \mathbf{1.a}\text{, on a } \phi_n(1) = 1 \\ &= \mathbb{E}(Z_n).\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=m}.\end{aligned}$$

<u>*Conclusion*</u> : On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Z_{n+1}) = m.\mathbb{E}(Z_n).}$$

Commentaires

De nombreux problèmes ou exercices d'oraux démontrent ou admettent certains de ces résultats, car c'est un outil absolument capital. Manifestement, l'auteur de l'énoncé a eu conscience, comme le montre le préambule, qu'il fallait les donner aux candidats, puisqu'ils sont hors-programme.

Mais au lieu de les énoncer pour toute variable aléatoire, il l'a seulement dit explicitement *pour la variable X de l'énoncé*, laissant ainsi au candidat la charge de deviner qu'il peut aussi l'utiliser pour ϕ_n, comme nous allons le faire, pour exploiter comme dans la question **1.a** le lien entre espérance et dérivée.

Cela a sans doute gêné des candidats scrupuleux, ne souhaitant pas déborder des hypothèses de l'énoncé, comme on leur a appris pendant toute leur scolarité, et notamment pendant leurs années de préparation aux concours.

Au contraire, cela a sans doute avantagé des étudiants moins portés sur la rigueur formelle, mais plus audacieux et autonomes, ou ayant tout simplement déjà vu le principe de ce genre de démonstration avant.

Il aurait sans doute été plus judicieux de donner un résultat général au début, et de mettre ainsi tout le monde à égalité.

• La suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison m, et on a donc, puisque $\mathbb{E}(Z_0) = 1$ par hypothèse :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Z_n) = m^n.}$$

Commentaires

Une erreur fréquente. D'après le rapport du jury, de nombreuses copies essayent d'exploiter la linéarité de l'espérance en commettant l'erreur suivante :

« Comme $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$, alors *par linéarité de l'espérance*,

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{Z_n} \mathbb{E}(X_{n,k}) = \sum_{k=1}^{Z_n} \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{Z_n} m = m.Z_n$$ »

Mais c'est **faux** : la linéarité de l'espérance s'applique à un nombre **fixé** de variables or ici le nombre de variables $X_{n,k}$ est aléatoire, puisque c'est Z_n.

3. a) L'événement $(\tau < +\infty)$ signifie :

$$\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0$$

c'est à dire, dans notre modèle :

« il existe une semaine n pendant laquelle il n'y a plus de personnes infectées. »

De plus, l'absence de personnes infectées à une semaine donnée entraîne qu'il n'y a plus jamais de personnes infectées après cette semaine. C'est évident du point de vue du modèle, mais on peut aussi en donner un argument mathématique : si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{0} X_{n,k} = 0$ (puis récurrence...). Ainsi :

$$(\tau < +\infty) = \text{« l'épidémie s'éteint un jour »}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau < +\infty) \text{ est la probabilité que l'épidémie s'éteigne un jour.}}$$

Commentaires

Raisonnement extrêmement classique, à maîtriser absolument, et bien traité par la grande majorité des copies d'après le rapport de l'épreuve.

b) • Comme on l'a vu précédemment, si $Z = 0$, cela signifie qu'à la semaine n, il n'y a plus d'individus malades, ce qui entraîne qu'à la semaine $n+1$, il n'y en a pas non plus, autrement dit

$$Z_n = 0 \Longrightarrow Z_{n+1} = 0$$

c'est à dire, en termes d'événements :

$$(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0).}$$

Commentaires

Complément : Ce qui précède est encore un raisonnement extrêmement classique, à maîtriser absolument, et pourtant, d'après le rapport, de nombreux candidats se sont égarés en croyant qu'il fallait utiliser l'indication destinée à la deuxième partie de la question . Ainsi, cette question s'est avérée trop difficile alors qu'il s'agit en fait d'une application d'une propriété élémentaire des probabilités, mais qui ne figure malheureusement pas (de manière très surprenante) au programme en BCPST :

> Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ considérons une suite *croissante* d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$$
>
> Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Cette propriété générale se démontre avec l'idée qui est donnée dans l'énoncé en indication, et pour un candidat aux ENS, il paraît important de réaliser son existence, tant ce type de raisonnement est fréquent. Notons qu'on en tire aussi un corollaire très utile :

> Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ considérons une suite *décroissante* d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$$
>
> Alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Nous laissons la preuve de ce corollaire à la lectrice ou au lecteur. Détaillons celle du résultat précédent dans le cadre du problème, avec $A_n = (Z_n = 0)$:

• Montrons que $\xi = \lim \mathbb{P}(Z_n = 0)$: D'après la question précédente, ξ est la probabilité qu'à une certaine semaine, il n'y ait plus de personnes infectées, autrement dit :

$$\xi = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(Z_n = 0)\right).$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*, C_n = (Z_n = 0) \setminus (Z_{n-1} = 0)$ et $C_0 = (Z_0 = 0) = \emptyset$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k=0}^{n}(Z_k = 0) = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$$

et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty}(Z_k = 0) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k$$

Et par conséquent :

$$\xi = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(Z_k = 0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right)$$

Or, par construction, les événements C_k sont deux à deux incompatibles, et donc, par $\sigma-$additivité :

$$\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_k).$$

Enfin, on a vu au début de cette question que $\forall k \in \mathbb{N}, (Z_{k-1} = 0) \subset (Z_k = 0)$, donc

$$\mathbb{P}\left(C_k\right) = \mathbb{P}\left(Z_k = 0\right) - \mathbb{P}\left(Z_{k-1} = 0\right). \quad \textit{C'est ici que sert la croissance de la suite.}$$

Donc, par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(C_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(Z_k = 0\right) - \mathbb{P}\left(Z_{k-1} = 0\right) = \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$$

et finalement :

$$\boxed{\xi = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right).}$$

Commentaires

Encore une fois, la difficulté de cette question vient de ce choix étonnant du programme de BCPST : si la propriété fort utile mentionnée dans la remarque précédente (et présente dans tout cours de probabilités, hors BCPST) était au programme, ce raisonnement serait naturel, alors que le prouver « en direct » nécessite un empilement de propriétés qui n'est pas évident si on ne l'a jamais vu.

c) • Comme on l'a déjà vu, on a pour tout $t \in [0,1]$: $\phi_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right).t^k$. En particulier :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n\left(0\right) = \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right).}$$

• Dans la **question 2.b**, on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}(0) = \phi(\phi_n(0)).$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim \phi_n(0) = \lim \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right) = \xi.$$

On a donc :

- D'une part :

$$\lim \phi_{n+1}(0) = \lim \phi_n(0) = \xi.$$

- D'autre part, $\lim \phi_{n+1}(0) = \lim \phi(\phi_n(0))$. Or $\lim \phi_n(0) = \xi \in [0,1]$ et on a admis dans le préambule du problème que ϕ était continue sur $[0,1]$, et elle l'est donc en particulier en ξ. On a donc :

$$\lim \phi_{n+1}(0) = \phi(\xi).$$

Par unicité de $\lim \phi_{n+1}(0)$, on a donc :

$$\boxed{\phi(\xi) = \xi}$$

d) • Soit $\zeta \in [0,1]$ un point fixe de ϕ. Rappelons (**question 1.a**) que $\phi(0) = p_0 > 0$ par hypothèse de l'énoncé, donc $\zeta \neq 0$.
On peut donc appliquer la **question 2.b** à $t = \zeta$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_{n+1}(\zeta) &= \phi_n(\phi(\zeta)) \\ &= \phi_n(\zeta). \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n(\zeta) = \zeta.$$

• Or la fonction ϕ_n est croissante sur $[0,1]$ (mêmes arguments que pour la fonction ϕ dans la **question 1.a**) donc, comme $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n(0) \leqslant \phi_n(\zeta) = \zeta.}$$

Commentaires

Ce raisonnement s'applique aussi à ξ, le fait que l'énoncé indique que « ζ est un ***autre*** point fixe de ϕ » est donc parfaitement inutile.

e) • On a vu dans la **question 3.b** que $\xi = \lim \phi_n(0)$. En passant l'inégalité de la question précédente à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient donc :

$$\boxed{\xi \leqslant \zeta.}$$

• Ceci étant vrai pour tout point fixe ζ de ϕ, ξ est donc un minorant de l'ensemble $\{x \in [0,1] \text{ tels que } \phi(x) = x\}$.
Par ailleurs, d'après la **question 3.c**, ξ appartient à cet ensemble (qui, au passage, n'est donc pas vide), donc :

$$\boxed{\xi = \min \{x \in [0,1] \text{ tels que } \phi(x) = x\}.}$$

Commentaires

D'après le rapport, l'un des freins majeurs qui ont bloqué les candidats pour les questions précédentes, a été de comprendre que $\phi_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, ce qui est, encore une fois, parfaitement clair si on a conscience que ce qu'on admet en préambule sur la question ϕ, ainsi que ce qu'on prouve dans la **question 1.a** s'applique aussi à ϕ_n. Ces considérations très classiques autour de la ***fonction génératrice d'une variable aléatoire*** (voir le complément donné en **question 2.c**) ne sont pas pas au programme en BCPST, mais reviennent dans bien des problèmes de concours et il est utile de les avoir vues.

4. a)

Commentaires

Attention ! On vous demande de prouver la positivité STRICTE, ce qui a échappé, d'après le rapport de l'épreuve, à beaucoup de candidats.

Rappel : une somme (finie ou infinie) de termes **réels positifs** est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.

Ainsi, pour montrer qu'une somme dont les termes sont connus comme positifs est en fait ***strictement*** positive, il suffit de montrer qu'au moins un de ses termes est strictement positif, et réciproquement. Nous allons utiliser cette propriété dans les deux sens.

Soit $t \in]0,1[$.
• D'après l'énoncé on a

$$\phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2}.$$

En particulier, $\phi''(t)$ est une somme de termes positifs, donc :

– $\phi''(t) \geqslant 0$
– de plus, $\phi''(t) = 0$ si et seulement si $\forall k \geqslant 2, k(k-1)p_k t^{k-2} = 0$.

Or, comme $t > 0$ et $k \geqslant 2$, on a :

$$\forall k \geqslant 2, k(k-1)t^{k-2} > 0$$

donc finalement :

$$\phi''(t) = 0 \text{ si et seulement si } \forall k \geqslant 2, p_k = 0.$$

- Or, par hypothèse :
  – $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$
  – $p_0 + p_1 < 1$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} p_k > 0$, et donc, comme c'est une somme de termes positifs :

$$\exists k \geqslant 2, p_k > 0$$

Conclusion : Ainsi, $\forall t \in]0,1[, \exists k \geqslant 2, k(k-1)p_k t^{k-2} > 0$, et donc :

$$\boxed{\phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2} > 0}$$

b) D'après la question précédente, $\phi'' > 0$ sur $]0,1[$, donc :

la fonction ϕ' est strictement croissante sur $]0,1]$.

Donc en particulier, comme $\phi'(1) = m$ (**question 1.a**) :

$$\forall x \in]0,1[, \phi'(x) < \phi'(1) = m.$$

On a deux possibilités pour conclure :

- Méthode 1, par intégration : Soit $t \in]0,1[$, en intégrant entre t et 1 l'inégalité précédente, on obtient par stricte positivité (ϕ' étant continue et pas identiquement nulle sur $[t,1]$) :

$$\int_t^1 \phi'(x)\,\mathrm{d}x < \int_t^1 m.\,\mathrm{d}x$$

  c'est à dire :

$$\underbrace{\phi(1)}_{=1} - \phi(t) < m(1-t)$$

  et donc

$$\boxed{\forall t \in]0,1[, \phi(t) > m(t-1) + 1.}$$

- Méthode 2, par accroissements finis : Soit $t \in]0,1[$, on a :
  · ϕ continue sur $[t,1]$
  · ϕ dérivable sur $]t,1[$.

  On peut appliquer le théorème des accroissements finis à ϕ sur $[t,1]$: on dispose d'un réel $c \in]t,1[$ tel que :

$$\underbrace{\phi(1)}_{=1} - \phi(t) = \phi'(c)(1-t) < m(1-t) \text{ (d'après ce qui précède)}$$

  et donc :

$$\boxed{\forall t \in]0,1[, \phi(t) > m(t-1) + 1.}$$

Commentaires

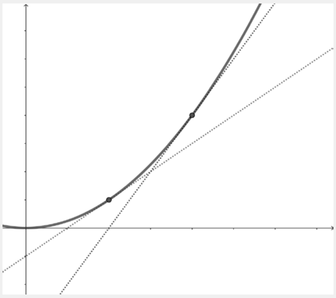
(Complément sur la convexité des fonctions numériques)
Ceci est un cas particulier de méthodes qui ne sont pas techniquement au programme en BCPST, mais qui sont capitales en mathématiques. Le raisonnement fait ici est central dans la notion de ***Convexité d'une fonction numérique réelle***.

> Une fonction f dérivable sur un intervalle I est dite *convexe sur* I lorsque son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes en des points de I.
>
> On peut montrer comme précédemment (par intégration ou accroissements finis) le résultat capital suivant :
>
> Si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.

C'est exactement ce qu'on nous demande de prouver ici pour la fonction ϕ : on a prouvé que le graphe de ϕ est au dessus de sa tangente en 1, d'équation $y = \phi'(1).(t-1) + \phi(1) = m(t-1)+1$, et plus précisément qu'elle est strictement au-dessus (sauf en 1, bien sûr).

Comme souvent, connaître à l'avance l'existence de ce type de raisonnement est un avantage non-négligeable, même s'il n'est pas absolument nécessaire ici, car il ressemble à bien d'autres exercices liés à l'intégration ou au théorème des accroissements finis.

Illustration : Une fonction convexe, et deux tangentes.



Exemple très classique (à maîtriser !) laissé au lecteur ou à la lectrice :

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire un encadrement simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En déduire la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) Supposons $m \leqslant 1$.
Montrons par l'absurde que $\xi = 1$: Supposons que $\xi < 1$. D'après la question précédente, en prenant $t = \xi$, on a :

$$\phi(\xi) > m(\xi - 1) + 1.$$

Or, d'après **3.c**, $\phi(\xi) = \xi$, donc : $\xi > m\xi + 1 - m$, c'est à dire :

$$(1-m)\xi > (1-m).$$

On a alors deux cas, puisque $m \leqslant 1$:

- Si $m = 1$, on obtient $0 > 0$: **Contradiction**.
- Si $m < 1$, on obtient (en divisant par $1 - m > 0$) : $\xi > 1$: **Contradiction**.

Conclusion : On a montré par l'absurde que :

$$\boxed{\text{si } m \leqslant 1, \text{ alors } \xi = 1.}$$

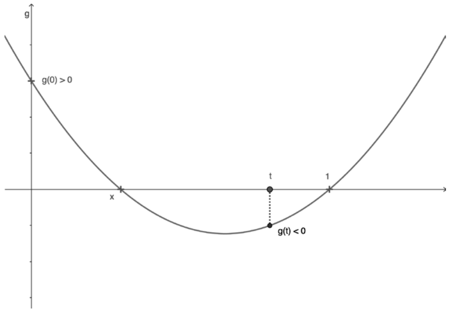
d) • On a vu en **question 3.e** que $\xi = \min\{x \in [0,1] \text{ tel que } \phi(x) = x\}$. Pour montrer que $\xi < 1$, il suffit donc de montrer qu'il existe un réel $x < 1$ tel que $\phi(x) = x$.

• Posons $g(x) = \phi(x) - x$ et montrons que g s'annule sur $[0,1[$: On a :
- $g(0) = \phi(0) - 0 = p_0 > 0$
- $g(1) = \phi(1) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Commentaires

Idée : la fonction g étant continue sur $[0,1]$, si on peut montrer qu'il existe un réel $t < 1$ tel que $g(t) < 0$, il suffira d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g sur $[0,t]$ pour assurer l'existence d'un réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant t < 1$ et $g(x) = 0$. Pour cela, on va montrer qu'au voisinage à gauche de 1, g est strictement croissante, ce qui va assurer l'existence d'un tel réel t, puisque $g(1) = 0$.

Illustration :



• On a $\forall x \in]0,1], g'(x) = \phi'(x) - 1$, et en particulier :

$$g'(1) = \phi'(1) - 1 = m - 1 \text{ d'après la } \textbf{question 1.a}.$$

En particulier, dans cette question, on a

$$\boxed{g'(1) > 0.}$$

• Comme la fonction g est de classe C^1 sur $]0,1]$ (comme différence de deux fonctions de cette classe), g' est continue en 1, et par conséquent

$$\lim_{1^-} g' = g'(1) > 0$$

donc il existe un réel $t \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in]t,1[, g'(x) > 0$.
Ainsi, comme par ailleurs la fonction g est continue sur $[t,1]$, elle est donc strictement croissante sur $[t,1]$. En particulier :

$$g(t) < g(1) = 0.$$

- On a donc trouvé un réel $t \in [0,1[$ tel que :
  - $g(t) < 0$,
  - la fonction g est continue sur $[0,t]$,
  - et on rappelle que $g(0) > 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors l'existence d'un réel $x \in [0,t]$ tel que $g(x) = 0$.

Conclusion : On a prouvé l'existence d'un réel $x < 1$ tel que $\phi(x) = x$. On a donc, d'après la question 3.b :

$$\boxed{\xi \leqslant x < 1.}$$

Commentaires

- D'après le rapport, très peu de copies ont réussi à traiter cette question.
- **Attention ! Un raisonnement faux est très naturel ici :**

  « Comme vu dans la question précédente, on a : $(1-m)\xi > (1-m)$.
  En divisant par $1-m<0$, on a donc $\xi < 1$ »

  Mais il y a une erreur subtile : dans la **4.c**, l'inégalité « $(1-m)\xi > (1-m)$ » provient de la question précédente en utilisant l'hypothèse... $\xi < 1$! Par conséquent ce raisonnement est circulaire : il utilise (implicitement) ce qu'il veut prouver pour le prouver.

5.

Commentaires

- Juste avant cette question, dans l'énoncé, il y a une petite coquille (indiquée d'ailleurs dans le rapport) : l'auteur a oublié de remplacer l'ancienne notation C_n^k par la notation moderne $\binom{n}{k}$. Si cela devait arriver à nouveau, soyez prévenu(e)s !
- Par ailleurs, la notation inhabituelle « $q \in (0,1)$ » signifie « $q \in]0,1[$ » (notation anglo-saxonne).

- Comme X suit une loi binomiale : $p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k(1-q)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $q \in]0,1[$. On a, pour $t \in [0,1]$, par le binôme de Newton,

$$\phi(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k(1-q)^{n-k}.t^k = (1-q+tq)^n .$$

- <u>Dans le cas où cas $n=2$</u> : $m = \mathbb{E}(X) = 2q$ et on a donc :
  - <u>Si $q \leqslant \frac{1}{2}$</u> : $m \leqslant 1$ et $\boxed{\xi = 1}$ (d'après **la question 4.c**).
  - <u>Si $q > \frac{1}{2}$</u> : On a $\xi < 1$ d'après **la question 4.d**. Résolvons l'équation $\phi(t) - t = 0$:

$$\begin{array}{rcl} \phi(t) - t & = & (1-q+tq)^2 - t \\ & = & (1-q)^2 + (2q.(1-q)-1).t + q^2.t^2. \end{array}$$

C'est une équation du second degré en t (puisque $q^2 \neq 0$). On a deux chemins possibles :

- Soit on résout (un peu péniblement) avec le discriminant... *(calculs laissés au lecteur)*
- Soit on remarque plus subtilement que :

- 1 est racine évidente *(On sait depuis **1.a** que $\phi(1) - 1 = 0\ldots$)*,
- le produit des racines de ce trinôme est $\dfrac{1-q^2}{q^2}$.

<u>*Conclusion*</u> : Quelle que soit la méthode, on trouve lorsque $q > \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\xi = \frac{(1-q)^2}{q^2} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2.}$$

Rappel de cours

(Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré)
On considère un polynôme réel ou complexe de degré $\boxed{2}$

$$P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \text{ (avec } a_2 \neq 0).$$

Le théorème de d'Alembert-Gauss nous indique qu'il a deux racines complexes (à multiplicité près). Notons-les r_1 et r_2 (pas forcément distinctes). On a alors

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \text{ et } r_1.r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

6. a) Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\forall x \in]0,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}}_{H_n}.$$

<u>*Initialisation*</u> : pour $n = 0$, on a $\forall k \geqslant 0$, $\dbinom{k}{n} = 1$, et donc on reconnaît dans H_0 la somme d'une série géométrique de raison $x \in]0,1[$:

$$\forall x \in [0,1[\,, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

<u>*Hérédité*</u> : Supposons H_n vraie, c'est à dire :

$$\forall x \in [0,1[\,, \ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

Montrons que H_{n+1} est vrai, c'est à dire :

$$\forall x \in [0,1[\,, \ \frac{1}{(1-x)^{n+2}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k}{n+1} x^{k-(n+1)}.$$

Commentaires

Encore une question techniquement hors des clous du programme : pour prouver l'hérédité, on est obligé

- soit de multiplier deux sommes infinies :

$$\frac{1}{(1-x)^{n+2}} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.\frac{1}{(1-x)} = \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}x^{k-n}.\sum_{\ell=0}^{+\infty}x^{\ell}$$

  mais on n'a pas de résultats officiels dans le programme nous permettant d'avancer...

- Soit de procéder par dérivation pour nous ramener de H_n à H_{n+1}, en généralisant encore une fois la propriété admise pour ϕ' en début d'énoncé.

Nous choisissons de développer cette seconde rédaction, qui nous paraît plus dans l'esprit de l'énoncé.

Nous allons supposer ici que la « règle de dérivation terme à terme » admise en début d'énoncé pour ϕ s'applique encore pour la série située à gauche du signe « = » et dériver ainsi de chaque côté :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[\,,\ \frac{n+1}{(1-x)^{n+2}} &= \sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}.(k-n)x^{k-n-1}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\binom{k}{n}.(k-n)x^{k-(n+1)}\end{aligned}$$

Or, pour $k > n$, la formule du capitaine donne :

$$\binom{k}{n}.(k-n) = \frac{(k-n).k!}{(k-n)!n!} = \frac{k!}{(k-n-1)!n!} = \frac{k!(n+1)}{(k-n-1)!(n+1)!} = (n+1)\binom{k}{n+1}$$

et donc il reste, après simplification de $n+1$,

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \frac{1}{(1-x)^{n+2}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\binom{k}{n+1}x^{k-(n+1)}.$$

Ceci est la formule cherchée pour H_{n+1}, ce qui achève l'étape d'hérédité.

b) • Comme X suit une loi binomiale négative, on a :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}p_k.t^k = (1-q)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{k}q^kt^k\\ &= (1-q)^n\sum_{\ell=n-1}^{+\infty}\binom{\ell}{\ell-(n-1)}(qt)^{\ell-(n-1)}\\ &\quad \text{(en posant } \ell = k+n-1\text{)}\\ &= (1-q)^n\sum_{\ell=n-1}^{+\infty}\binom{\ell}{n-1}(q.t)^{\ell-(n-1)}\\ &= (1-q)^n\frac{1}{(1-q.t)^n} \quad \text{d'après } \textbf{6.a}.\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{P}(X=0) = \phi(0) = (1-q)^n$ *et* $\phi(1) = 1$.

• Déterminons $m = E(X)$: l'énoncé présuppose depuis le début que $E(X)$ existe, on n'a pas besoin de prouver son existence, et on peut appliquer directement la **question 1.b** pour avoir :

$$m = \phi'(1).$$

En dérivant le résultat de la première partie de la question, on obtient :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \phi'(t) = (1-q)^n \frac{n.q}{(1-q.t)^{n+1}}$$

et donc :

$$\boxed{m = \phi'(1) = (1-q)^n \frac{n.q}{(1-q)^{n+1}} = \frac{n.q}{1-q}.}$$

Commentaires

L'énoncé présuppose depuis le début que X admet une espérance, donc on n'a pas, techniquement, besoin de prouver dans cette question que c'est le cas. Mais en réalité, il le faudrait, mais ce serait une conséquence de la théorie des fonctions génératrices, qui permet de dire que $E(X)$ existe $\boxed{\text{si et seulement si}}$ ϕ est dérivable en 1, et que dans ce cas $E(X) = \phi'(1)$.

c) • D'après la question précédente, comme on a ici $n = 2$, on a

$$m = 2.\frac{q}{1-q}.$$

Comme précédemment, on doit faire deux cas suivant que $m \leqslant 1$ ou $m > 1$:
On a :

$$\begin{aligned}
m \leqslant 1 &\iff 2.\frac{q}{1-q} \leqslant 1 \\
&\iff 2.\frac{q}{1-q} - 1 \leqslant 0 \\
&\iff \frac{2q-(1-q)}{1-q} \leqslant 0 \\
&\iff 2q-(1-q) \leqslant 0 \\
&\iff q \leqslant \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

• On a donc deux cas :

— Si $q \leqslant \frac{1}{3}$: alors $m \leqslant 1$ et dans ce cas $\boxed{\xi = 1}$ (d'après **4.c**).

— Si $q > \frac{1}{3}$: alors $m > 1$ et dans ce cas $\boxed{\xi < 1}$ et $\phi(\xi) = \xi$, c'est à dire :

$$\xi = (1-q)^2 \frac{1}{(1-q.\xi)^2}$$

c'est à dire :

$$\boxed{(1-q)^2 = \xi(1-q\xi)^2.}$$

Ainsi, si $q > \frac{1}{3}$:
- $\xi \in]0,1[$
- ξ est racine de l'équation polynomiale : $(1-q)^2 - t(1-qt)^2 = 0$.

- Comme 1 est racine évidente de ce polynôme, cherchons à le factoriser par $t-1$:

$$\begin{aligned} t(1-qt)^2-(1-q)^2 &= q^2.t^3-2q.t^2+t-(1-q)^2 \\ &= q^2.(t^3-1)-2q.(t^2-1)+t-1 \\ &= (t-1)\left(q^2(t^2+t+1)-2q(t+1)+1\right) \\ &= (t-1)\left(q^2t^2+(q^2-2q)t+(q-1)^2\right). \end{aligned}$$

- Comme $\xi<1$, il est forcément solution de l'équation du second degré :

$$q^2t^2+(q^2-2q)t+(q-1)^2=0.$$

  - Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (q^2-2q)^2-4.q^2(q-1)^2 \\ &= (q^2-2q)^2-[2.q(q-1)]^2 \\ &= \left[(q^2-2q)-2q(q-1)\right].\left[(q^2-2q)+2q(q-1)\right] \\ &= q^3(4-3q) \end{aligned}$$

  - Comme $q<1$, on a clairement $\Delta>0$, et l'équation admet donc 2 solutions (après simplification par q) :

$$r_1=\frac{2-q-\sqrt{q(4-3q)}}{2q} \text{ et } r_2=\frac{2-q+\sqrt{q(4-3q)}}{2q}$$

  avec $r_1<r_2$.

- Ainsi, ξ est soit r_1, soit r_2, et on sait aussi que $\xi<1$. Montrons que $r_2>1$. Pour cela remarquons :

$$r_2=\frac{2}{q}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{q}-3}.$$

Or la fonction $h: q\longmapsto \frac{2}{q}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{q}-3}$ est clairement décroissante (comme somme de telles fonctions) sur $]0,1]$, et

$$h(1)=2.$$

En particulier pour tout $q\in\left]\frac{1}{3},1\right[$:

$$r_2>1.$$

<u>*Conclusion*</u> : Finalement, $\boxed{\text{quand } q>\frac{1}{3}, \text{ on a } \xi=r_1=\frac{2-q-\sqrt{q(4-3q)}}{2q}.}$

Commentaires

On peut faire une petite vérification : lorsque $q\to\frac{1}{3}$, $\xi\to 1$, ce qui est cohérent avec ce que l'on a vu quand $q\leqslant\frac{1}{3}$.

Deuxième partie : Un modèle déterministe pour la propagation des épidémies

Commentaires

L'énoncé ne s'embarrasse pas ici des distinctions qu'on fait en cours de mathématiques pour les équations différentielles. Reformulons l'énoncé d'une manière plus « propre » :

- D'une part, il y a le système d'équations différentielles

$$\forall t \in I, \begin{cases} S'(t) & = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) & = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) & = \gamma I(t), \end{cases}$$

  où β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.
- D'autre part il y a les conditions initiales en 0 : $S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0.$
- Et on n'oublie pas de préciser sur quel intervalle on résout ce problème :
  On admettra qu'il existe un triplet de fonctions (S, I, R) qui est solution de ce problème de Cauchy sur $[0, +\infty[$.

- Rappelons au passage la distinction entre :
  - « résoudre une équation différentielle » : trouver toutes les fonctions solutions, sans considération de conditions initiales,
  - « résoudre un problème de Cauchy » : trouver toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle, munie de conditions initiales. Ce terme n'est pas officiellement au programme, mais il est bon de comprendre la différence (même si on n'est pas obligé de retenir cette terminologie).

7. • Plaçons-nous à un instant $t \geqslant 0$.

— Interprétation de l'équation $S'(t) = -\beta.S(t).I(t)$:

- $S'(t)$ représente la variation par unité de temps du nombre de personnes saines (c'est à dire non infectées et n'ayant jamais été infectées). Cette variation est forcément négative ou nulle (il n'y a pas de naissances ni de morts, et les personnes qui guérissent ne retournent pas dans la catégorie « S » mais vont dans la catégorie « R ») : ceci explique le signe « $-$ ».
- Le produit $S(t).I(t)$ peut être vu comme le nombre de rencontres potentielles entre une personne saine et une personne infectée (chaque personne saine pouvant rencontrer une personne infectée).
- Le paramètre β combine la probabilité moyenne de chacune de ces rencontres et celle qu'une telle rencontre entraîne une infection.

En fin de compte, cette équation nous dit que le nombre de personnes saines diminue, et ce proportionnellement, par unité de temps, au nombre de rencontres potentielles entre personnes saines et personnes infectées.

— Interprétation de l'équation $R'(t) = \gamma.I(t)$: cette équation nous dit que la variation par unité de temps du nombre de personnes guéries et immunisées est proportionnelle au nombre de personnes infectées. Plus précisément, une proportion γ constante des malades guérit à chaque instant : γ est le taux de guérison.

— Interprétation de l'équation $I'(t) = +\beta.S(t).I(t) - \gamma.I(t)$: la variation $I'(t)$ du nombre de malades par unité de temps se fait de deux manières :

- Le terme $\beta.S(t).I(t)$ est, comme vu avec la première équation, le nombre de « nouveaux infectés » qui viennent donc s'ajouter positivement à $I'(t)$.

- Le terme $-\gamma I(t)$ représente le nombre de personnes qui ne sont plus infectées (guéries).

- Interprétation du nombre $\frac{1}{\gamma}$: Nous allons proposer plusieurs niveaux d'analyse.

(*i*) Tout d'abord, en termes d'analyse dimensionnelle, $I'(t)$ et $R'(t)$ sont des nombres de personnes **par unité de temps** et $I(t)$ est un nombre de personnes. Par conséquent, d'après la deuxième ou la troisième équation, γ a la dimension de l'inverse d'une durée, donc $\boxed{\frac{1}{\gamma} \text{ a la dimension d'une durée.}}$

(*ii*) Si on s'intéresse au temps de guérison moyen, on peut isoler une population de malades (leur guérison n'ayant rien à voir avec les individus sains ou les guéris). Tout se passe comme si on reprenait notre modèle, mais avec S et R nulles. Cela donne :

$$I'(t) = -\gamma I(t)$$

On sait que cette équation donne une décroissance exponentielle, avec une « demi-vie » de la population (temps pour lequel la moitié de la population sera guérie) égale à $\frac{\ln 2}{\gamma}$, ce qui nous rapproche d'un « temps moyen de guérison » (ou de contagiosité, ce qui est la même chose dans ce modèle) de $\frac{1}{\gamma}$.

(*iii*) Pour pousser plus loin, on a besoin de modéliser le temps de guérison des malades individuellement. Comme notre réflexion est axée autour du temps moyen de guérison individuel, on peut décider de modéliser le temps de guérison T_m de chaque malade m par une même loi exponentielle (ce type de loi étant assez adapté à ce type de problème, et son paramètre est lié de manière simple à son espérance).

- Soit λ le paramètre (commun) à toutes ces variables exponentielles, qu'on va considérer comme indépendantes. Le temps moyen de guérison est donc $E(T_m) = \frac{1}{\lambda}$.
- Si on fixe une durée $\delta > 0$, la probabilité qu'un malade guérisse durant une durée δ est $P(T_m < \delta) = 1 - e^{-\lambda.\delta}$.
- Repassons à présent à l'échelle du groupe des malades : la loi faible des grands nombres nous indique, pour une population « assez grande » de malades, que la **proportion** de malades qui guérissent pendant la durée δ est probablement proche de la **probabilité** que chaque malade guérisse durant cette période (i.e. $1 - e^{-\lambda.\delta}$).
- On a donc, pour toute durée $\delta > 0$:

$$\frac{I(t+\delta) - I(t)}{I(t)} \simeq -\left(1 - e^{-\delta.\lambda}\right)$$

c'est à dire :

$$\frac{I(t+\delta) - I(t)}{\delta} \simeq -\frac{1 - e^{-\delta.\lambda}}{\delta}.I(t).$$

- Faisons à présent tendre δ vers 0 :

$$I'(t) \simeq -\lambda.I(t).$$

Ainsi, on a obtenu à partir d'une modélisation individuelle tenant compte de la durée de guérison moyenne une nouvelle équation différentielle pour le nombre d'infectés I dans une population isolée de malades.

- Revenons à notre modèle initial, en reprenant l'équation vue en (*ii*) régissant dans notre modèle une population isolée de malades $I'(t) = -\gamma.I(t)$, on obtient :

$$\lambda = \gamma.$$

Et par conséquent $\boxed{\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda} \text{ est le temps moyen de guérison/contagiosité des malades.}}$

8. a) • La première équation du système indique que S est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t).$$

Le théorème de résolution de ces équations donne :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ S(t) = S_0.e^{-\beta.\int_0^t I(s)\ ds}}$$

Commentaires

Bien comprendre le rôle de $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t I(s)\,\mathrm{d}s$. C'est l'unique primitive de I qui s'annule en 0. C'est en cela qu'on est en train d'appliquer le théorème classique de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

• Comme par hypothèse $S_0 > 0$ et que l'exponentielle est strictement positive, on a :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ S(t) > 0.}$$

b) • De même, I est solution de la deuxième équation du système :

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = (\beta.S(t) - \gamma).I(t).$$

La primitive de $t \longmapsto \beta.S(t) - \gamma$ qui s'annule en 0 est :

$$t \longmapsto \int_0^t (\beta.S(s) - \gamma)\,\mathrm{d}s = \beta.\int_0^t S(s).\,\mathrm{d}s - \gamma.t.$$

Par conséquent, le théorème de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 donne :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ I(t) = I_0.e^{\beta.\int_0^t S(s)\ ds - \gamma.t}.}$$

• De même, que précédemment, comme $I_0 > 0$, $\boxed{I(t) > 0 \text{ pour tout } t > 0.}$

• Enfin, la dernière équation du système implique d'après ce qui précède que :

$$\forall t \geqslant 0, R'(t) > 0.$$

Conclusion : R est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall t > 0,\ R(t) > R(0) = 0.}$$

c) • Additionnons les 3 équations du système :

$$\forall t \geqslant 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t) + I(t) + R(t)) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0.$$

Conclusion : $\boxed{S + I + R \text{ est bien constant en fonction du temps.}}$

• On a montré dans les questions précédentes que S, I et R étaient positives, par conséquent, en notant $K = S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0$, on a :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant S(t) \leqslant K, \quad 0 \leqslant I(t) \leqslant K, \quad 0 \leqslant R(t) \leqslant K.}$$

Commentaires

Le rapport précise que c'était cet argument mathématique qui était attendu ici, et non l'argument heuristique (pourtant naturel) disant que $S+I+R$ est la population totale, supposée constante puisqu'il n'y a ni morts ni naissances dans le modèle.
On peut trouver cela injuste, mais voyez cela comme une vérification de cohérence : on veut que le modèle ait une population globale constante (la constante K ci-dessus), et cette question prouve que c'est bien le cas (et aussi de vérifier qu'aucune des catégories S, I, R ne dépasse la population globale !).

d) • La première équation du système, et le fait que les fonctions S et I sont positives sur $\mathbb{R}^+$ d'après les questions précédentes donne que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, S'(t) < 0.$$

Par conséquent, S est décroissante et minorée (par 0) sur $[0,+\infty[$, donc admet une limite finie $S_\infty \in [0,K]$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

• De même, la dernière équation du système nous donne R' positive sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, R est croissante et majorée (par K) sur $[0,+\infty[$, donc admet une limite finie $R_\infty \in [0,K]$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

• Comme $I = K - S - R$, on a $\lim\limits_{+\infty} I = K - S_\infty - K_\infty$, qu'on notera I_∞.

Commentaires

Notons que le vocabulaire « converge » ne s'applique pas d'habitude aux fonctions en BCPST.

9. a) <u>Supposons $S_\infty \geqslant \gamma/\beta$</u> :
• Comme la fonction S est décroissante, on a :

$$\forall t \geqslant 0,\ S(t) \geqslant \frac{\gamma}{\beta}$$

et donc (deuxième équation du système) :

$$\forall t \geqslant 0,\ I'(t) = \beta.I(t)\left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta}\right). \geqslant 0$$

La fonction I est donc croissante sur $[0,+\infty[$ et donc croît vers sa limite $I_\infty \geqslant I_0$. On peut alors utiliser la troisième équation qui implique que

$$\forall t \geqslant 0,\ R'(t) \geqslant \gamma.I_0.$$

• Considérons un réel x et intégrons l'inégalité précédente sur $[0,x]$:

$$\int_0^x R'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \gamma.I_0\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\forall x \geqslant 0,\ R(x) - \underbrace{R_0}_{=0} \geqslant \gamma.I_0.x.$$

Donc par théorème de comparaison $\lim\limits_{+\infty} R = +\infty$: Contradiction avec le fait que R est bornée (**question 8.c**).

<u>Conclusion</u> : On a montré par l'absurde que $\boxed{S_\infty < \frac{\gamma}{\beta}.}$

b) Montrons par l'absurde que $I_\infty = 0$: Supposons que $I_\infty > 0$.

Commentaires

Comme S est strictement décroissante, de limite $S_\infty < \dfrac{\gamma}{\beta}$ (d'après la question précédente), deux cas peuvent se produire : soit S est toujours inférieure à $\dfrac{\gamma}{\beta}$, soit elle commence au-dessus, croise une et une seule fois cette valeur, et finit en dessous. Étudions ces deux cas séparément.

- Supposons $S_0 \leqslant \dfrac{\gamma}{\beta}$: On a donc, par stricte décroissance de S :

$$\forall t > 0,\ S(t) < \frac{\gamma}{\beta}$$

et, par le même argument que précédemment :

$$\forall t \geqslant 0,\ I'(t) = \beta.I(t)\left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta}\right) \leqslant 0.$$

La fonction I est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et est donc supérieure à sa limite I_∞. En intégrant la troisième équation comme en **9.a**, on obtient :

$$\forall x \geqslant 0,\ R(x) \geqslant \gamma.I_\infty.x.$$

Comme on a supposé que $I_\infty > 0$, on a comme en **9.a** $\lim\limits_{+\infty} R = +\infty$. **Contradiction** avec le fait que R est bornée.

- Supposons que $S_0 > \dfrac{\gamma}{\beta}$. La fonction S est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc le théorème de la bijection continue nous garantit l'existence d'un unique instant $t_0 > 0$ tel que $S(t_0) = \dfrac{\gamma}{\beta}$ et on a :

$$\forall t \in [0, t_0[,\ S(t) > \frac{\gamma}{\beta} \text{ et } \forall t > t_0,\ S(t) < \frac{\gamma}{\beta}.$$

Comme précédemment, on en déduit que I est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ puis que $\forall t \geqslant t_0$, $R'(t) \geqslant I_\infty$, et enfin que $\forall x \geqslant t_0$, $R'(x) \geqslant I_\infty(x - t_0) + R(t_0)$, ce qui entraîne toujours le même **contradiction** si $I_\infty > 0$.

Conclusion : Dans les deux cas, nous avons montré par l'absurde que

$$I_\infty = 0.$$

c) En reprenant ce que nous avons dit dans les questions précédentes (et avec t_0 défini comme dans la **question 9.b**), il y a deux cas :

- Si $S_0 \leqslant \dfrac{\gamma}{\beta}$:

$$\begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & & +\infty \\ \hline & & & R_\infty \\ R(t) & & \nearrow & \\ & 0 & & \\ \hline\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & & +\infty \\ \hline & S_0 & & \\ S(t) & & \searrow & \\ & & & S_\infty \\ \hline\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & & +\infty \\ \hline & I_0 & & \\ I(t) & & \searrow & \\ & & & 0 \\ \hline\end{array}$$

- Si $S_0 > \dfrac{\gamma}{\beta}$:

$$\begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & & +\infty \\ \hline & & & R_\infty \\ R(t) & & \nearrow & \\ & 0 & & \\ \hline\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & & +\infty \\ \hline & S_0 & & \\ S(t) & & \searrow & \\ & & & S_\infty \\ \hline\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|ccccc|}\hline t & 0 & & t_0 & & +\infty \\ \hline & & & I(t_0) & & \\ I(t) & & \nearrow & & \searrow & \\ & I_0 & & & & 0 \\ \hline\end{array}$$

10. a) D'après l'énoncé, il y a propagation de l'épidémie si et seulement si elle commence par croître, c'est à dire qu'on est dans le deuxième cas de la question précédente : $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$, c'est à dire :

$$\boxed{\text{L'épidémie se propage si et seulement si } \frac{\beta S_0}{\gamma} > 1.}$$

b) • Les deux modèles ne parlent pas exactement du même type de situation :

— Dans le modèle probabiliste, la question est : est-il certain que l'épidémie va finir par s'éteindre ou pas (c'est à dire devenir *endémique*) ?

— Dans le modèle déterministe, on a prouvé que l'épidémie s'éteint toujours, et la question est : s'est-elle *propagée* d'abord ou pas ?

• Le point commun entre les deux modèles est qu'il y a un paramètre dont la position par rapport à 1 fait « la bascule » entre les deux situations qualitativement différentes que traite le modèle :

— Dans le modèle probabiliste, l'épidémie a une probabilité non nulle de ne pas s'éteindre si et seulement si $m > 1$.

— Dans le modèle déterministe, l'épidémie se propage si et seulement si $\frac{\beta S_0}{\gamma} > 1$.

• Peut-on trouver une signification intuitive commune à ces deux paramètres ?

— Dans le modèle probabiliste, c'est assez clair : $m = E(X)$ est (par la loi des grands nombres) le nombre moyen de personnes contaminées par une personne infectée donnée.

— Dans le modèle déterministe, on va pouvoir interpréter encore, mais cela nécessite un peu plus de travail : Revenons aux significations heuristiques des différents paramètres vues en **question 7**, mais interprétons-les du point de vue d'un seul individu contaminant :

· S_0 est le nombre de rencontres potentielles qu'il peut faire

· βS_0 est le nombre moyen de contaminations qu'il va provoquer, **par unité de temps**

· $\frac{1}{\gamma}$ est le temps pendant lequel il va être contaminant, en moyenne.

Par conséquent, $\frac{\beta S_0}{\gamma}$ est le nombre moyen de contaminations qu'il va provoquer.

Conclusion : Dans les deux modèles, intervient, du point de vue heuristique, le même paramètre, c'est le fameux $\mathcal{R}_0$ égal au nombre moyen de personnes contaminées par une personne donnée. Il vaut m dans le premier modèle et $\frac{\beta S_0}{\gamma}$ dans le second.

- dans le modèle probabiliste, l'épidémie s'éteint si et seulement si $\mathcal{R}_0 < 1$,
- dans le modèle déterministe, l'épidémie ne se propage pas si et seulement si $\mathcal{R}_0 < 1$.